15. Semana 14

P1 **(a)** $p(x)$ es un polinomio de grado n, sin embargo, $L(p)(x)$ disminuye en 1 el grado del polinomio (notar que el exponente de x llega hasta $n-1$), por lo tanto, el grado de $L(p)(x)$ es $n-1$.

(b) Llamaremos $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, calcularemos $L(p)\cdot q$, $L(q)\cdot p$ y $L(p\cdot q)$ por separado.

$$L(p)\cdot q = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \cdot \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

$$L(p)\cdot q = \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} \cdot \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \qquad \text{\partir de 0 en esta sumatoria no la altera}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} k a_k b_i x^{k+i-1} \qquad \backslash k \text{ no depende de } i$$

Lo que ven ahí es una sumatoria doble cuyo mayor grado de x será $n+m-1$, vamos a reordenar esta sumatoria, pero antes es necesario ilustrarla con un ejemplo para entender mejor lo que ocurre, llamemos $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$, se tiene que $L(p)(x) = a_1 + 2a_2x$, luego $L(p)(x)\cdot q(x) = (b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)(a_1+2a_2x) = a_1b_0 + 2a_2b_0x + a_1b_1x + 2a_2b_1x^2 + a_1b_2x^2 + 2a_2b_2x^3 + a_1b_3x^3 + 2a_2b_3x^4$, efectivamente el mayor grado es $2+3-1=4$, reordenando el resultado se tiene que $a_1b_0 + (2a_2b_0 + a_1b_1)x + (2a_2b_1 + a_1b_2)x^2 + (2a_2b_2 + a_1b_3)x^3 + 2a_2b_3x^4$ notar entonces que este resultado se puede expresar como una sumatoria del estilo

$$\sum_{j=0}^{n+m} C_j x^{j-1}$$

Además $C_0 = 0$, $C_1 = a_1b_0$ y $C_2 = 2a_2b_0 + a_1b_1$, y fijándonos en el resultado obtenido anteriormente se tiene que $C_2 = 2a_2b_0 + a_1b_1 = 0\cdot a_0b_{2-0} + 1\cdot a_1b_1 + 2a_2b_0 = \sum_{k=0}^{2} k a_k b_{2-k}$, veamos si se cumple para C_3 (el coeficiente que acompaña a x^2), nos debería dar como nos dio en el ejemplo $2a_2b_1 + a_1b_2$. Calculando $\sum_{k=0}^{3} k a_k b_{3-k} = 0\cdot a_0b_{3-0} + 1\cdot a_1b_2 + 2a_2b_1 + 3a_3b_0$ pero a_3 no existe (=0), lo que nos da $2a_2b_1 + a_1b_2$ que coincide con lo que se quería llegar, resumiendo, para un C_j la fórmula queda $C_j = \sum_{k=0}^{j} k a_k b_{j-k}$ el reordenamiento final de la sumatoria es

$$\sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{j} k a_k b_{j-k} x^{j-1}$$

Lo que se hizo fue un reemplazo de índices, antes la sumatoria doble tenía dos (i y k) independientes entre sí pero tenían un fin en común: el exponente de x, entonces era posible cambiar la sumatoria para que fuera de 0 a $n+m$, con un índice j (así se recorrían los exponentes de x solamente una vez) y respecto a los coeficientes es preciso notar que $k, i \geq 0$ y su suma tenía que dar j ($x^{i+k-1} = x^{j-1}$), pero tener dos índices que sumados dan j es igual que tener uno que va de 0 a j y el otro es la diferencia entre ellos, de ahí que el índice i se reemplazó por $j-k$.

En el caso de $L(q) \cdot p$ se tiene que

$$\begin{aligned}
L(q) \cdot p &= \sum_{i=1}^{m} i b_i x^{i-1} \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\
L(p) \cdot q &= \sum_{i=0}^{n} i b_i x^{i-1} \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \backslash \text{partir de 0 en esta sumatoria no la altera} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} i a_k b_i x^{k+i-1} \qquad \backslash k \text{ no depende de } k \\
&= \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{j} (j-k) a_k b_{j-k} x^{j-1}
\end{aligned}$$

Siendo consistentes con el reemplazo del desarrollo anterior ($i = j - k$), el resultado es el mismo.

En el caso de $L(p \cdot q)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
p \cdot q &= \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} x^j \qquad \backslash \text{fórmula de producto de polinomios} \\
L(p \cdot q) &= \sum_{j=1}^{n+m} \sum_{k=0}^{j} j a_k b_{j-k} x^{j-1} \\
L(p \cdot q) &= \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{j} j a_k b_{j-k} x^{j-1} \qquad \backslash \text{partir de 0 en esta sumatoria no la altera}
\end{aligned}$$

Veamos que nos da $L(p)\cdot q + L(q)\cdot p$

$$\begin{aligned}
L(p)\cdot q + L(q)\cdot p &= \sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{j} ka_k b_{j-k}x^{j-1} + \sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{j}(j-k)a_k b_{j-k}x^{j-1}\\
&= \sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{j} ka_k b_{j-k}x^{j-1} + \sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{j}(ja_k b_{j-k}x^{j-1} - ka_k b_{j-k}x^{j-1})\\
&= \sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{j}(ka_k b_{j-k}x^{j-1} + ja_k b_{j-k}x^{j-1} - ka_k b_{j-k}x^{j-1})\\
&= \sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{j} ja_k b_{j-k}x^{j-1}\\
&= L(p\cdot q)
\end{aligned}$$

(c)
- Caso base($n=1$): Tenemos que $a_1 = 1$, luego $L(p)(x) = L((x-d)) = 1 = 1\cdot(x-d)^0$.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $L(p)(x) = n\cdot(x-d)^{n-1}$, para cierto $p(x) = (x-d)^n$ con $n \geq 1$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $L(p)(x) = (n+1)\cdot(x-d)^n$, con $p(x) = (x-d)^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
L(p)(x) &= L((x-d)^n\cdot(x-d))\\
&= L((x-d)^n)(x-d) + L((x-d))(x-d)^n && \text{\textbackslash usando parte (b)}\\
&= n\cdot(x-d)^{n-1}(x-d) + 1\cdot(x-d)^n && \text{\textbackslash hipótesis inductiva}\\
&= n\cdot(x-d)^n + (x-d)^n\\
&= (n+1)\cdot(x-d)^n
\end{aligned}$$

16. Semana 15

P1 Si α, β, γ son las raíces de $p(z)$, dado que es mónico entonces se puede escribir como $p(z) = (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$, luego igualando se tiene que

$$\begin{aligned}
z^3 + az^2 + bz + c &= (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma) \\
&= (z^2 - \alpha z - \beta z + \alpha\beta)(z-\gamma) \\
&= z^3 - \gamma z^2 - \alpha z^2 + \alpha\gamma z - \beta z^2 + \beta\gamma z + \alpha\beta z - \alpha\beta\gamma \\
z^3 + az^2 + bz + c &= z^3 - (\gamma + \alpha + \beta)z^2 + (\alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta)z - \alpha\beta\gamma
\end{aligned}$$

Pero por igualdad de polinomios entonces los coeficientes son iguales con lo que se deduce que $\alpha\beta\gamma = -c$, $\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta = b$ y $\gamma+\alpha+\beta = -a$. Usando esto, como los coeficientes son reales, y admite una raíz compleja, entonces su conjugado también es raíz, luego $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2 = 16$, con esto se tiene que $z_1\overline{z_1}\gamma = 112$, es decir, $16\gamma = 112$ con lo que la tercera raíz es γ=7, además

$$\begin{aligned}
z_1 + \overline{z_1} + 7 &= 11 \\
2Re(z_1) &= 4 \\
Re(z_1) &= 2
\end{aligned}$$

Si $z_1 = a+ib$ y es de módulo 4, como $a = 2$ quiere decir que $\sqrt{a^2+b^2} = 4$, con lo que $b^2 = 12$ y obtenemos las dos soluciones restantes $b_1 = 2\sqrt{3}$ y $b_2 = -2\sqrt{3}$, finalmente las 3 raíces son $z_1 = 2 + i2\sqrt{3}$, $\overline{z_1} = 2 - i2\sqrt{3}$ y $\gamma = 7$.

P2 Aplicando la misma relación que en el P1, como los coeficientes son reales, y admite una raíz compleja, entonces su conjugado también es raíz, luego $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2 = 13$, con esto se tiene que $z_1\overline{z_1}\gamma = 65$, es decir, $13\gamma = 65$ con lo que la tercera raíz es γ=5, además

$$\begin{aligned}
z_1 + \overline{z_1} + 5 &= 9 \\
2Re(z_1) &= 4 \\
Re(z_1) &= 2
\end{aligned}$$

Si $z_1 = a+ib$ y es de módulo 4, como $a = 2$ quiere decir que $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{13}$, con lo que $b^2 = 9$ y obtenemos las dos soluciones restantes $b_1 = 3$ y $b_2 = -3$, finalmente las 3 raíces son $z_1 = 2 + i3$, $\overline{z_1} = 2 - i3$ y $\gamma = 5$.

P3 Lo primero es obtener las raíces de $q(x) = x^2 + x + 1$, mediante la fórmula cuadrática

$$x^2 + x + 1 = 0 \begin{cases} x_1 = & \frac{-1+\sqrt{1^2-4}}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ x_2 = & \frac{-1-\sqrt{1^2-4}i}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} = e^{\frac{-2\pi i}{3}} \end{cases}$$

Con esto se tiene entonces que $\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^2 + e^{\frac{2\pi i}{3}} + 1 = q\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = q(x_1) = 0$ y $\left(e^{\frac{-2\pi i}{3}}\right)^2 + e^{\frac{-2\pi i}{3}} +$

$1 = q\left(e^{\frac{-2\pi i}{3}}\right) = q(x_2) = 0$. Guardaremos este resultado y probaremos que $x_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ es raíz de $p(x) = x^{2n} + 1 + (x+1)^{2n}$, en efecto

$$\begin{aligned}
p\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) &= \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{2n} + 1 + (e^{\frac{2\pi i}{3}} + 1)^{2n} \\
&= \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{2(3k\pm1)} + 1 + (e^{\frac{2\pi i}{3}} + 1)^{2(3k\pm1)} \\
&= \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{2(3k\pm1)} + 1 + \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} + 1\right)^{2(3k\pm1)} \\
&= \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{2(3k\pm1)} + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{2(3k\pm1)} \\
&= \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{2(3k\pm1)} + 1 + \left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{2(3k\pm1)} \\
&= \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{6k\pm2} + 1 + \left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{6k\pm2} \\
&= \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{6k}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{\pm2} + 1 + \left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{6k}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{\pm2} \\
&= \left(e^{4\pi ik}\right)\left(e^{\frac{\pm4\pi i}{3}}\right) + 1 + \left(e^{2\pi i}\right)\left(e^{\frac{\pm2\pi i}{3}}\right) \\
&= \left(e^{\frac{\pm4\pi i}{3}}\right) + 1 + \left(e^{\frac{\pm2\pi i}{3}}\right)
\end{aligned}$$

Si analizamos por casos (positivo y negativo) se tiene que

- Caso +: $\left(e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) + 1 + \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^2 + 1 + \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = q(x_1) = 0.$
- Caso -: $\left(e^{\frac{-4\pi i}{3}}\right) + 1 + \left(e^{\frac{-2\pi i}{3}}\right) = \left(e^{\frac{-2\pi i}{3}}\right)^2 + 1 + \left(e^{\frac{-2\pi i}{3}}\right) = q(x_2) = 0.$

Probamos entonces que x_1 es raíz de $p(x)$, pero además, x_2 es conjugado de x_1 y los coeficientes son reales lo que implica que x_2 también es raíz de $p(x)$. Por propiedad si $p(x)$ tiene raíces x_1 y x_2 entonces el producto de de la raíces $(x-x_1)(x-x_2)$ divide a $p(x)$ (recordar que $p(x)$ se puede descomponer en productos de raíces, luego es factible simplificar por ellas), pero justamente $q(x) = (x-x_1)(x-x_2)$, con lo que se concluye que $q(x)$ divide a $p(x)$.

P4 Como $p(x)$ tiene n raíces distintas en $\mathbb{C}$ vamos a llamar $x_1, x_2, ..., x_k$ las raíces reales de $p(x)$, por lo cual existen $n-k$ raíces complejas. Debido al enunciado, si $z \in \mathbb{C}$ es raíz entonces su conjugado también lo es, entonces llamaremos $z_1, z_2, ..., z_l, \overline{z_1}, \overline{z_2}, ..., \overline{z_l}$ las raíces complejas, con $l = \frac{n-k}{2}$. Finalmente como $p(x)$ es mónico es posible reeescribirlo de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
p(x) &= (x-x_1)...(x-x_k)(x-z_1)(x-\overline{z_1})(x-z_2)(x-\overline{z_2})....(x-z_l)(x-\overline{z_l}) \\
&= (x-x_1)...(x-x_k)(x-z_1-\overline{z_1}+z_1\overline{z_1})(x-z_2-\overline{z_2}+z_1\overline{z_2})....(x-z_l-\overline{z_l}+z_1\overline{z_l}) \\
&= (x-x_1)...(x-x_k)(x-2Re(z_1)+|z_1|^2)(x-2Re(z_2)+|z_2|^2)....(x-2Re(z_l)+|z_l|^2)
\end{aligned}$$

Con esto $p(x)$ tiene solamente coeficientes reales, con lo que se concluye que $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

P5 **(a)** Usando el teorema de la división y del resto, existe un polinomio $q(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ tal que el polinomio se puede escribir como $p(x) = q(x)(x^2 - b^2) + cx$ con $gr(cx) < gr(x^2 - b^2)$, luego $p(b) = q(b)(b^2 - b^2) + cb = cb$ y $p(-b) = q(b)((-b)^2 - b^2) - cb = -cb$.

(b) Por el teorema de la división, existe un polinomio $s(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ tal que $p(x) = s(x)(x^2 - b^2)(x - a) + r(x)$ con $gr(r(x)) < gr((x^2 - b^2)(x - a))$, es decir, $gr(r(x)) < 3$, lo que es lo mismo que $gr(r(x)) \leq 2$.

(c) Sabemos que $p(x) = q(x)(x^2 - b^2) + cx$ y que $p(x) = s(x)(x^2 - b^2)(x - a) + r(x)$, igualando ambas expresiones tenemos que

$$\begin{aligned} s(x)(x^2 - b^2)(x - a) + r(x) &= q(x)(x^2 - b^2) + cx \\ r(x) &= q(x)(x^2 - b^2) - s(x)(x^2 - b^2)(x - a) + cx \\ r(x) &= (x^2 - b^2)[q(x) - s(x)(x - a)] + cx \end{aligned}$$

Pero como $gr(r(x)) \leq 2$, entonces necesariamente $[q(x) - s(x)(x - a)]$ es un polinomio constante, de no ser así, $[q(x) - s(x)(x - a)]$ sería de la foma $a_1 x + ...$ que al multiplicarse con $(x^2 - b^2)$ entregaría un polinomio de grado mayor o igual que 3, lo que contradice que $gr(r(x)) \leq 2$, luego como es mónico, entonces solamente quedan 2 casos posibles: $[q(x) - s(x)(x - a)] = 1$ o $[q(x) - s(x)(x - a)] = 0$, en el primer caso $r(x) = x^2 - b^2 + cx$ y en el segundo caso $r(x) = x$, necesariamente con $c = 1$ en este último caso porque $r(x)$ es mónico. Cualquiera de los 2 resultados es correcto.

P6 Con la información que se nos entrega y usando el teorema de la división, entonces existen polinomios Q y S en $\mathbb{K}[x]$ tales que $F = (G \cdot H)Q + R$ y $R = SG + R'$ con $gr(R) < gr(G \cdot H)$ y $gr(R') < gr(G)$, reemplazando R se tiene entonces que $F = (G \cdot H)Q + SG + R'$, reordenando se tiene que $F = G(HQ + S) + R'$, con lo que el resto de dividir F por G es R', además efectivamente cumple que es resto ya que $gr(R') < gr(G)$.

P7 Notemos que como los coeficientes son reales y además i es raíz, entonces $-i$ también es raíz. Por el teorema de la división, existe un polinomio $q(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ tal que $p(x) = (x-1)q(x) + r(x)$ con $gr(r(x)) < gr((x - 1))$, esto significa que $r(x)$ es un polinomio de grado menor que 1, entonces solamente puede ser un polinomio de grado 0 (constante) o grado $-\infty$ (polinomio 0, que también es constante). En ambos casos $r(x) = k$, con k constante a determinar y como nos dicen que $r(4) = 0$ quiere decir que la constante $k = 0$, ya que $r(1) = r(2) = r(3) = r(4) = ... = r(x) = k$, al ser constante siempre vale lo mismo, y si para $r(4) = 0$ entonces para el resto de valores también, con lo que se concluye que $r(x) = 0$. Al decir que $r(x)$ es 0 entonces $p(x)$ es divisible por $(x - 1)$, con lo que 1 es la última raíz que se estaba buscando.

Con esto $p(x) = (x - i)(x + i)(x - 1)$ e igualando con el $p(x)$ original se tiene que

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x - i)(x + i)(x - 1) \\ &= (x^2 - i + i - i^2)(x - 1) \\ &= (x^2 + 1)(x - 1) \\ x^3 + ax^2 + bx + c &= x^3 - x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

Por igualdad de polinomios entonces $a = -1$, $b = 1$ y $c = -1$.

P8 El teorema a demostrar es una generalización de que por 2 puntos pasa una única recta o por 3 puntos pasa una única parábola, siendo la recta y la parábola 2 polinomios de grados 1 y 2 respectivamente. Este teorema dice que dados n puntos en el plano, existe un único polinomio de grado menor o igual a $n - 1$ que pasa por todos esos puntos.

(a) Razonaremos por contradicción, supongamos que existen 2 polinomios de interpolación $p(x)$ y $q(x)$, con $gr(p(x)), gr(q(x)) \leq n - 1$, esto quiere decir que $p(x_j) = q(x_j) = y_j$ $\forall j \in \{1, ..., n\}$. Se define el polinomio $h(x) = p(x) - q(x)$, con $gr(h(x)) \leq n - 1$ pero $h(x_j) = p(x_j) - q(x_j) = y_j - y_j = 0$ $\forall j \in \{1, ..., n\}$, con lo que $h(x)$ tiene n raíces distintas y, por lo tanto, es de grado n, lo que contradice que $gr(h(x)) \leq n - 1$, la única opción que queda es entonces que sea de grado $-\infty$ (polinomio 0) ya que el polinomio 0 tiene infinitas raíces. Pero entonces $h(x) = 0 = p(x) - q(x)$, con lo que $p(x) = q(x)$, es decir, solamente existe un polinomio de interpolación y con esto se demuestra la unicidad.

(b) El símbolo de π grande indica una productoria, que es análogo a una sumatoria, sólo que en vez de sumar, multiplica. A modo de ejemplo $\prod_{k=1}^{5} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120$. Analizemos ahora $l_j(x)$

$$l_j(x) = \frac{\prod_{k=1(k \neq j)}^{n} (x - x_k)}{\prod_{k=1(k \neq j)}^{n} (x_j - x_k)} \in \mathbb{K}[x]$$

1.) El numerador multiplica $n - 1$ términos, ya que se salta el asociado con j $(k \neq j)$, con lo que el grado de $l_j(x)$ es $n - 1$, el denominador posee coeficientes y también $(k \neq j)$ para evitar división por 0. Los $x_1, x_2 ... x_n$ son la colección de puntos del enunciado, entonces son valores fijos. Calculamos ahora $l_j(x_r)$

Si $j = r$

$$l_j(x_r) = l_j(x_j) = \frac{\prod_{k=1(k \neq j)}^{n} (x_j - x_k)}{\prod_{k=1(k \neq j)}^{n} (x_j - x_k)} = 1$$

Si $j \neq r$

$$l_j(x_r) = \frac{\prod_{k=1(k \neq j)}^{n} (x_r - x_k)}{\prod_{k=1(k \neq j)}^{n} (x_j - x_k)} = \frac{(x_r - x_1)(x_r - x_2) ... (x_r - x_r) ... (x_r - x_n)}{\prod_{k=1(k \neq j)}^{n} (x_j - x_k)} = 0$$

Con esto se concluye que $l_j(x_r) = \delta_{jr} = \begin{cases} 1, & j = r \\ 0, & j \neq r \end{cases}$

2.) Por la parte 1. se tiene que el grado de $p(x)$ es menor o igual a $n-1$ ya que corresponde a una sumatoria de polinomios del tipo $l_j(x)$ cuyo grado sabemos que es $n-1$ y los y_j son valores numéricos fijos, que no aumentan el grado del polinomio. Ahora falta ver que $p(x_m) = y_m$ $\forall m \in \{1, ..., n\}$, en efecto, sea $m \in \{1, ..., n\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} p(x_m) = & \sum_{j=1}^{n} y_j l_j(x_m) \\ & = y_1 l_1(x_m) + y_2 l_2(x_m) + y_3 l_3(x_m) + ... + y_m l_m(x_m) + ... + y_n l_n(x_m) \\ & = y_1 \delta_{1m} + y_2 \delta_{2m} + y_3 \delta_{3m} + ... + y_m \delta_{mm} + ... + y_n \delta_{nm} \\ & = y_1 \cdot 0 + y_2 \cdot 0 + y_3 \cdot 0 + ... + y_m \cdot 1 + ... + y_n \cdot 0 \\ & = 0 + 0 + 0 + ... + y_m + ... + 0 \\ & = y_m \end{aligned}$$

Con lo que se concluye que $p(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j l_j(x)$ es el polinomio de interpolación para la familia de puntos en el plano $(\{x_j\}_{j=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n)$.

P9 Antes que todo, es importante notar que J_2 es un conjunto de polinomios reales cuyo grado es menor o igual que 2, no pueden ser constantes y no tienen coeficiente libre de x, es decir, son de la forma $p(x) = a_1 x + a_2 x^2$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0$, al tomar dos polinomios de J_2 lo que hace $\triangle$ es componer ambos polinomios, pero como debe cumplir la l.c.i, entonces trunca todo grado mayor que 2, a modo de ejemplo si tomamos $p(x) = 3x + 2x^2$ y $q(x) = x + 5x^2$, se tiene que $p(x) \triangle q(x) = p(q(x)) = 3(x + 5x^2) + 2(x + 5x^2)^2 = 3x + 17x^2 + 20x^3 + 50x^4$ pero obedeciendo la l.c.i, entonces queda finalmente $p(x) \triangle q(x) = 3x + 17x^2$.

(a) Demostraremos que $(J_2, \triangle)$ es grupo no abeliano, es decir, que es asociativo, posee neutro e inverso, pero no es conmutativo.

- Asociatividad: Sean $p(x), q(x), r(x) \in J_2$, siendo $p(x) = a_1 x + a_2 x^2$, $q(x) = a_3 x + a_4 x^2$ y $r(x) = a_5 x + a_6 x^2$ con $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{R}, a_1, a_3, a_5 \neq 0$

$$\begin{aligned} (p(x) \triangle q(x)) \triangle r(x) & = (a_1(a_3 x + a_4 x^2) + a_2(a_3 x + a_4 x^2)^2) \triangle r(x) \\ & = (a_1 a_3 x + (a_1 a_4 + a_2 a_3^2) x^2) \triangle r(x) \\ & = a_1 a_3 (a_5 x + a_6 x^2) + (a_1 a_4 + a_2 a_3^2)(a_5 x + a_6 x^2)^2 \\ & = a_1 a_3 a_5 x + (a_1 a_3 a_6 + a_1 a_4 a_5^2 + a_2 a_3^2 a_5^2) x^2 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
p(x) \triangle (q(x) \triangle r(x)) &= p(x) \triangle (a_3(a_5x + a_6x^2) + a_4(a_5x + a_6x^2)^2) \\
&= p(x) \triangle (a_3a_5x + (a_3a_6 + a_4a_5^2)x^2) \\
&= a_1(a_3a_5x + (a_3a_6 + a_4a_5^2)x^2) + a_2(a_3a_5x + (a_3a_6 + a_4a_5^2)x^2)^2 \\
&= a_1a_3a_5x + (a_1a_3a_6 + a_1a_4a_5^2 + a_2a_3^2a_5^2)x^2
\end{aligned}$$

- Neutro: Tomando el polinomio $q(x) = x$, claramente $q(x) \in J_2$, además se tiene que $p(x) \triangle q(x) = q(x) \triangle p(x) = p(q(x)) = q(p(x)) = p(x)$ se concluye que el neutro en J_2 es el polinomio $q(x) = x$.
- Inverso: Sea $p(x) = a_1x + a_2x^2 \in J_2, a_1 \neq 0$ el inverso será el polinomio $q(x) = \frac{x}{a_1} - \frac{a_2x^2}{a_1^3}$, en efecto

$$\begin{aligned}
p(x) \triangle q(x) &= a_1\left(\frac{x}{a_1} - \frac{a_2x^2}{a_1^3}\right) + a_2\left(\frac{x}{a_1} - \frac{a_2x^2}{a_1^3}\right)^2 \\
&= a_1\left(\frac{x}{a_1} - \frac{a_2x^2}{a_1^3}\right) + a_2\left(\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 - \frac{2a_2x^3}{a_1^4} + \left(\frac{a_2x^2}{a_1^3}\right)^2\right) \\
&= a_1\left(\frac{x}{a_1} - \frac{a_2x^2}{a_1^3}\right) + \frac{a_2x^2}{a_1^2} \qquad \text{\truncando grado mayor que 2} \\
&= x - \frac{a_2x^2}{a_1^2} + \frac{a_2x^2}{a_1^2} \\
&= x
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned}
q(x) \triangle p(x) &= \frac{a_1x + a_2x^2}{a_1} - \frac{a_2(a_1x + a_2x^2)^2}{a_1^3} \\
&= \frac{a_1x + a_2x^2}{a_1} - \frac{a_2(a_1^2x^2 + 2a_1a_2x^3 + a_2^2x^4)}{a_1^3} \\
&= \frac{a_1x + a_2x^2}{a_1} - \frac{a_2a_1^2x^2}{a_1^3} \qquad \text{\truncando grado mayor que 2} \\
&= x + \frac{a_2x^2}{a_1} - \frac{a_2x^2}{a_1} \\
&= x
\end{aligned}$$

Se concluye que, dado el polinomio $p(x) = a_1x + a_2x^2 \in J_2, a_1 \neq 0$, el inverso será el polinomio $q(x) = \frac{x}{a_1} - \frac{a_2x^2}{a_1^3}$, para llegar a determinarlo lo que se hizo fue tomar un $q(x)$ arbitrario, vale decir $q(x) = a_3x + a_4x^2$ y componerlo con $p(x)$, de esta manera se obtenían condiciones para a_3 y a_4

$$\begin{aligned} p(x) \triangle q(x) &= a_1(a_3x + a_4x^2) + a_2(a_3x + a_4x^2)^2 \\ &= a_1(a_3x + a_4x^2) + a_2(a_3^2x^2 + 2a_3a_4x^3 + a_4^2x^4) \\ &= a_1a_3x + a_1a_4x^2 + a_2a_3^2x^2 \qquad \backslash\text{truncando grado mayor que 2} \\ &= a_1a_3x + (a_1a_4 + a_2a_3^2)x^2 \end{aligned}$$

Queremos llegar al polinomio neutro x, entonces solamente queda que $a_1a_3 = 1$, es decir, $a_3 = \frac{1}{a_1}$ y que $a_1a_4 + a_2a_3^2 = 0$, lo que es igual a $a_4 = -\frac{a_2}{a_1^3}$.

- No abeliano: Basta tomar un contraejemplo $p(x) = x + x^2$ y $q(x) = 3x$, se tiene que

$$p(x) \triangle q(x) = 3x + (3x)^2 = 3x + 9x^2$$
$$q(x) \triangle p(x) = 3(x + x^2) = 3x + 3x^2$$

Se concluye que $(J_2, \triangle)$ es un grupo no abeliano.

(b) Sean $p(x) = a_1x + a_2x^2, q(x) = a_3x + a_4x^2 \in J_2, a_1, a_3 \neq 0$, con $f(p(x)) = a_1$ y $f(q(x)) = a_3$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(p(x) \triangle q(x)) &= f(a_1(a_3x + a_4x^2) + a_2(a_3x + a_4x^2)^2) \\ &= f(a_1(a_3x + a_4x^2) + a_2(a_3^2x^2 + 2a_3a_4x^3 + a_4^2x^4)) \\ &= f(a_1a_3x + a_1a_4x^2 + a_2a_3^2x^2) \qquad \backslash\text{truncando grado mayor que 2} \\ &= f(a_1a_3x + (a_1a_4 + a_2a_3^2)x^2) \\ &= a_1a_3 \\ &= f(p(x))f(q(x)) \end{aligned}$$

Falta demostrar que sea sobreyectivo, es decir, $(\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{0\})(\exists p(x) \in J_2)(f(p(x)) = y)$, en efecto, basta tomar el polinomio $p(x) = yx$, con esto se tiene que $f(p(x)) = f(yx) = y$ con lo que se concluye que es un morfismo sobreyectivo.

(c) *Nota: Hay un error de tipeo, en vez de a_2 debe decir que $a_1 = 1$*
Los polinomios en H son de la forma $p(x) = x + a_2x^2$. Sean $p(x) = x + a_2x^2, q(x) = x + a_4x^2 \in H$, calculemos $p(x) \triangle q(x)^{-1}$, recordar que el inverso de $q(x)$ es $q(x)^{-1} = x - a_4x^2$

$$\begin{aligned} p(x) \triangle q(x)^{-1} &= (x - a_4x^2) + a_2(x - a_4x^2)^2 \\ &= (x - a_4x^2) + a_2(x^2 - 2a_4x^3 + a_4^2x^4) \\ &= x - a_4x^2 + a_2x^2 \qquad \backslash\text{truncando grado mayor que 2} \\ &= x + (a_2 - a_4)x^2 \end{aligned}$$

El cual pertenece a H. Para ver que es abeliano, tomamos dos polinomios arbitrarios en H. sean $p(x) = x + a_2x^2, q(x) = x + a_4x^2$

$$\begin{aligned} p(x) \triangle q(x) &= (x + a_4x^2) + a_2(x + a_4x^2)^2 \\ &= (x + a_4x^2) + a_2(x^2 + 2a_4x^3 + a_4^2x^4) \\ &= x + a_4x^2 + a_2x^2 \qquad \backslash\text{truncando grado mayor que 2} \\ &= x + (a_2 + a_4)x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(x) \bigtriangleup p(x) &= (x + a_2x^2) + a_4(x + a_2x^2)^2 \\ &= (x + a_2x^2) + a_4(x^2 + 2a_2x^3 + a_2^2x^4) \\ &= x + a_2x^2 + a_4x^2 \qquad \backslash\text{truncando grado mayor que 2} \\ &= x + (a_2 + a_4)x^2 \end{aligned}$$

Con lo que se concluye que $(H, \bigtriangleup)$ es subgrupo abeliano de $(J_2, \bigtriangleup)$.

Capítulo 8

Polinomios

8.1. Problemas resueltos.

P1) Dado un polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, se define

$$L(p(x)) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \qquad (E)$$

1. Si $p(x) = (x-c)^n$ demuestre que $L(p(x)) = n(x-c)^{n-1}$
2. Demostrar que si $p(x), q(x) \in P_n(\mathbb{R})$, entonces

$$L(p \cdot q(x)) = L(p(x))q(x) + L(q(x))p(x)$$

Solución:

1. Desarrollemos $p(x)$

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-c)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (-c)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} (-1)^{n-k} c^{n-k}}_{a_k} x^k \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
L(p(x)) &= \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} c^{n-k} x^{k-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} (-1)^{n-i-1} c^{n-i-1} x^{i} (i+1) \qquad\qquad (c.v.:\ i = k-1) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} (i+1)(-c)^{(n-1)-i} x^{i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \frac{n!}{(n-(i+1))!(i+1)!} (-c)^{(n-1)-i} x^{i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{((n-1)-i))!i!} (-c)^{(n-1)-i} x^{i} \\
&= n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{i} (-c)^{(n-1)-i} \\
&= n(x-c)^{n-1}
\end{aligned}
$$

2. Sean $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ y $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$

$$
\begin{aligned}
L(p(x))q(x) &= \left(\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \right) \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1} \right) \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} i a_i b_j x^{i-1} x^{j} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} i a_i b_j x^{i+j-1}
\end{aligned}
$$

Análogamente

$$
L(q(x))p(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} j a_i b_j x^{i+j-1}
$$

Por lo tanto

$$L(p(x))q(x) + L(q(x))p(x) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} i a_i b_j x^{i+j-1} + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} j a_i b_j x^{i+j-1}$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j-1}(i+j)$$

Veamos ahora cómo es $L(p \cdot q(x))$

$$p \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j} \Rightarrow L(p \cdot q(x)) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j) a_i b_j x^{i+j-1} \quad (*)$$

Luego

$$L(p \cdot q(x)) = L(p(x))q(x) + L(q(x))p(x)$$

(*)Notar que aqui se usó que $L(p_1(x)) + p_2(x)) = L(p_1(x) + L(p_2(x))$ (ejercicio!!), puesto que la suma $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j)a_i b_j x^{i+j-1}$ no tiene la forma del enunciado (E), hay potencias de x repetidas en distintos sumandos.

$\square$

P2) 1. Divida el polinomio $p(x) = x^5 + 3x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ por $q(x) = x^3 + x^2 + 1$.

2. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales distinto del polinomio nulo. Se sabe que $i, 1, 2, 3$ son raices de $p(x)$.

    a) Diga el grado minimo de dicho polinomio.

    b) Dé un polinomio mónico a coeficientes reales de dicho grado que tenga a $i, 1, 2, 3$ como raices.

Solución:

1. $(x^5 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 2) \div (x^3 + x^2 + 1) = x^2 - x + 4$

$\underline{-\ \ x^5 + x^4 + x^2}$

$-x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 3x + 2$

$\underline{-\ \ -x^4 - x^3 - x}$

$4x^3 - 6x^2 + 4x + 2$

$\underline{-\ \ 4x^3 + 4x^2 + 4}$

$-10x^2 + 4x - 2$

Como $gr(-10x^2 + 4x - 2) = 2 < gr(x^3 + x^2 + 1) = 3$ ya no podemos seguir dividiendo, luego

$$x^5 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = (x^3 + x^2 + 1)(x^2 - x + 4) - 10x^2 + 4x - 2$$

2. *a)* Como $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, si i es raiz entonces $-i$ también lo es. Asi, tenemos que $i, -i, 1, 2, 3$ son raices del polinomio $p(x)$, por lo tanto

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-i)(x+i)|p(x)$$

Como $gr((x-1)(x-2)(x-3)(x-i)(x+i)) = 5$, para que lo anterior sea posible, debemos tener que $gr(p(x)) \geq 5$.

b) Un polinomio mónico es aquel en el cual el coeficiente que acompaña a la mayor potencia es 1, entonces para encontrar un polinomio mónico a coeficientes reales que tenga como raices a $i, 1, 2, 3$ (y por lo tanto a $-i$ también) basta multiplicar los polinomios de la forma $(x - k)$ con $k = i, -i, 1, 2, 3$ ya que la mayor potencia se va a producir cuando multipliquemos las x de cada polinomio. Luego, un polinomio que satisface con lo pedido es

$$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-i)(x+i) = (x-1)(x-2)(x-3)(x^2+1)$$

$\square$

P3) Dado el polinomio $p(x) = ax^5 - x^3 - ax^2 + 1$ con $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, se pide

1. Determinar el valor de a sabiendo que 1 es raiz doble de $p(x)$.

2. Determinar todas las raices de $p(x)$ para el valor de a encontrado en (a).

Solución:

1. Que 1 sea raiz doble implica que $(x-1)(x-1)|p(x)$, por lo tanto $(x-1)^2|p(x)$. Hagamos esta última división.

$$(ax^5 - x^3 - ax^2 + 1) \div (x^2 - 2x + 1) = ax^3 + 2ax^2 + x(3a-1) + (3a-2)$$

$$\underline{-\ \ ax^5 - 2ax^4 + ax^3}$$

$$2ax^4 - x^3(a+1) - ax^2 + 1$$

$$\underline{-\ \ 2ax^4 - 4ax^3 + 2ax^2}$$

$$(3a-1)x^3 - 3ax^2 + 1$$

$$\underline{-\ \ (3a-1)x^3 + 2x^2(3a-1) - x(3a-1)}$$

$$(3a-2)x^2 + x(3a-1) + 1$$

$$\underline{-\ \ (3a-2)x^2 - 2x(3a-2) - (3a-2)}$$

$$(3a-3)x - 3a + 3$$

Como $(x-1)^2 | p(x)$ deberiamos tener que el resto es cero, es decir

$$3a - 3 = 0 \quad \wedge \quad -3a + 3 = 0 \iff a = 1$$

2. Demostramos en la parte anterior que $a = 1$ y que (reemplazando $a = 1$ en la división que hicimos):

$$(x^5 - x^3 - x^2 + 1) \div (x^2 - 2x + 1) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

Luego para encontrar las otras raices de $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ hay que buscar las raices de $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Normalmente dividiriamos este último polinomio por $(x - r)$ en busca de la raiz r, pero por simple inspección notamos que -1 es una raiz. Hagamos la división para seguir buscando las otras raices:

$$(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) \div (x + 1) = x^2 + x + 1$$

$$\underline{-\ \ x^3 + x^2}$$

$$x^2 + 2x + 1$$

$$\underline{-\ \ x^2 + x}$$

$$x + 1$$

$$\underline{-\ \ x + 1}$$

$$0$$

Por último, debemos encontrar las raices de x^2+x+1. Pero para este tipo de polinomios (segundo grado) tenemos una fórmula para encontrar sus raices, las que son

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

Resumiendo, las raices de $p(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$ son $\{1, -1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}$.

$\square$

P4) Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales tal que para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ el resto de la división entre $p(x)$ y $(x-a)$ es igual a $A \in \mathbb{R}$ y el resto de la división entre $p(x)$ y $(x-b)$ es igual a $B \in \mathbb{R}$.
Encuentre el resto de dividir $p(x)$ por $(x-a)(x-b)$.

Solución:

Sea $r(x)$ el resto de dividir $p(x)$ por $(x-a)(x-b)$. Por el Teorema de la División,

$$p(x) = q(x)(x-a)(x-b) + r(x) \;\; \text{con } gr(r(x)) < gr((x-a)(x-b)) = 2$$

Por otra parte, notemos que A es también el resto de dividir $r(x)$ por $(x-a)$ y B, el de dividir $r(x)$ por $(x-b)$. En efecto, por el Teorema de la División:

$$r(x) = q_1 \cdot (x-a) + \alpha \; (*) \quad \text{con } \alpha = r(a) = cte.$$

Introduciendo esto en la división de $p(x)$ por $r(x)$

$$p(x) = q(x)(x-a)(x-b) + q_1 \cdot (x-a) + \alpha = [q(x)(x-b) + q_1](x-a) + \alpha$$

Como α es de grado $\leq 0 < gr(x-a)$, por la unicidad el Teorema de la División, α es el resto de dividir $p(x)$ por $(x-a)$, es decir, $\alpha = A$, luego A resulta ser el resto de dividir $r(x)$ por $(x-a)$. Análogamente para B.

Notar que por (*), que ahora es $r(x) = q_1 \cdot (x-a) + A$, sólo nos falta conocer q_1, que, dado que el grado de $r(x)$ es ≤ 1, deberá ser de grado ≤ 0, es decir, una constante.
Pero el resto de dividir $r(x)$ por $(x-b)$ es $r(b)$ (por lo tanto $B = r(b)$), luego evaluando (*) en b

$$B = r(b) = q_1 \cdot (b-a) + A \;\Rightarrow\; q_1 = \frac{B-A}{b-a}$$

Asi,

$$r(x) = \frac{B-A}{b-a}(x-a) + A.$$

$\square$

P5) En este problema demostraremos el llamado Teorema de Interpolación.

Sea K cuerpo ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in K$, con $x_j \neq x_k$ si $j \neq k$. Entonces existe un único polinomio de grado menor o igual a $n-1$ en $K[x]$ tq $(\forall\, j = 1, ..., n) \quad p(x_j) = y_j$.

Llamemos a este polinomio, polinomio de interpolación de la familia $\left(\{x_j\}_{j=1}^n \ , \ \{y_j\}_{j=1}^n\right)$

1. Suponiendo la existencia de p(x), demuestre la unicidad.
2. Para cada $j = 1, ..., n$ definimos:

$$l_j(x) = \frac{\prod_{k=1\ (k\neq j)}^n (x - x_k)}{\prod_{k=1\ (k\neq j)}^n (x_j - x_k)} \in K[x]$$

   a) Determine el grado de $l_j(x)$ y pruebe que :

$$l_j(x_r) = \delta_{jr} = \begin{cases} 1 & j = r \\ 0 & j \neq r \end{cases} \qquad \forall\, j, r = 1, ..., n$$

   b) Demuestre que $p(x) = \sum_{j=1}^n y_j l_j(x) \in K[x]$ es polinomio de interpolación para la familia $\left(\{x_j\}_{j=1}^n \ , \ \{y_j\}_{j=1}^n\right)$.

Solución:

1. Si $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son polinomios de interpolación, luego

$$\forall i = 1, ..., n,\ p_1(x_i) = y_i \quad \wedge \quad \forall i = 1, ..., n,\ p_2(x_i) = y_i$$

   Entonces

$$\forall i = 1, ..., n,\ p_1(x_i) = p_2(x_i)$$

   Es decir, tenemos dos polinomios de grado $\leq n - 1 < n$ que coninciden en los n puntos distintos $x_1, ..., x_n$, por lo tanto $p_1(x) = p_2(x)$.

2. *a*) El denominador de $l_j(x)$ es una constante, asi que para ver el grado de $l_j(x)$ hay que analizar el numerador, que es

$$\prod_{k=1\ (k\neq j)}^{n} (x - x_k)$$

   Vemos que el numerador es la multiplicación $(n-1)$ veces de polinomios de la forma $(x - a)$ cuyo grado es 1, por lo tanto el grado de $l_j(x)$ es $(n-1) \cdot 1 = (n-1)$.

   Sea $i \in \{1, ..., n\}$, evaluemos $l_j(x)$ en x_i

$$l_j(x_i) = \frac{\prod_{k=1\ (k\neq j)}^n (x_i - x_k)}{\prod_{k=1\ (k\neq j)}^n (x_j - x_k)}$$

   - $i \neq j$: como k va a tomar el valor i, el numerador va a contener el factor $(x_i - x_i) = 0$, por lo que $l_j(x_i)$ será cero.

- $i = j$: vemos directamente al evaluar que $l_j(x_j) = 1$ (numerador=denominador).

Por lo tanto
$$l_j(x_i) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \qquad \forall\, j, i = 1, ..., n$$

b) Para ver que $p(x)$ es un polinomio de interpolación hay que verificar que:

1) $\underline{gr(p(x)) \leq n-1 :}$

$$gr(p(x)) = gr(\sum_{j=1}^{n} y_j l_j(x)) \leq Max_{j\in\{1,...,n\}}\{gr(l_j(x))\}$$

Pero vimos que

$$gr(l_j(x)) = n-1 \ (\forall\, j \in \{1, ..., n\}) \ \Rightarrow \ gr(p(x)) \leq n-1$$

2) $\underline{\forall\, i \in \{1, ..., n\},\ p(x_i) = y_i :}$

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j l_j(x_i)$$

Pero
$$l_j(x_i) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \qquad \forall\, j, i = 1, ..., n$$

Luego, el único término que sobrevive de la sumatoria es $y_i l_i(x_i) = y_i$. Asi, $\forall\, i \in \{1, ..., n\},\ p(x_i) = y_i$.

Como $p(x)$ verifica A y B, es un polinomio de interpolación.

□

8.2. Problemas propuestos.

P1) Sean $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, $gr(p(x)) \geq 4$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$. Se sabe que :

- El resto de dividir $p(x)$ por $(x^2 - b^2)$ es cx.
- El resto $r(x)$, de dividir $p(x)$ por $(x^2 - b^2)(x - a)$ es un polinomio "mónico", es decir, el coeficiente asociado a x^n, donde $n = gr(r(x))$, es igual a 1.

1. Determine los valores $p(b)$ y $p(-b)$.
2. Justifique que $gr(r(x)) \leq 2$.
3. Determine $r(x)$

P2)
1. Sea $p \in K[x]$ un polinomio de grado 2 ó 3. Demuestre que p es irreducible en $K[x]$si y sólo si p no tiene raices en K.
2. Sea $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ y $a \in \mathbb{C}$ una raiz de $p(x)$. Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, se define el polinomio $D(p)$ tal que $D(p)(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$. Se sabe que si $p, q \in \mathbb{C}[x]$ entonces $D(p \cdot q)(x) = D(p)(x)q(x) + p(x)D(q)(x)$. Probar que $D(p)(a) = 0$ si y sólo si $(x-a)^2$ divide a $p(x)$.

P3)
1. Se sabe que $1+i$ es una raiz de $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10$. Determine las otras raices de p(x).
2. Sea $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$. Sean x_i con $i = 1, 2, ..., n$ las raices del polinomio p(x). Determine las raices del polinomio $g(x) = a_0 \mu^n x^n + a_1 \mu^{n-1} x^{n-1} + ... + a_{n-1}\mu x + a_n$ con $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
3. Determine las raices del polinomio :

$$16x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 8x + 10$$

P4) Realice las siguientes divisiones :

- $(x^n - a^n) \div (x-a)$.
- $(x^n + a^n) \div (x-a)$.
- $[i \cdot z^3 + (3 + 8 \cdot i) \cdot z^2 + (-1 + 19 \cdot i) \cdot z + 3 \cdot z \cdot i - 40] \div (i \cdot z + 4 + 5 \cdot i)$.

P5) Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Se sabe que al dividir $p(x)$ por $x(x^2-9)$ el resto es $(2x^2-3)$. Calcular el resto de dividir $p(x)$ por (x^2-9).