Capítulo 7

Números Complejos

7.1. Problemas resueltos.

P1) 1. Determine todos los números complejos tales que $|z-2|=1$.

2. Resuelva la ecuación en $\mathbb{C}$, $z^5=i$.

Solución:

1. Supongamos z de la forma $z=a+ib$ con $a,b\in\mathbb{R}$, entonces

$$|z-2|=|a+ib-2|=\sqrt{(a-2)^2+b^2}$$

Asi:

$$\begin{aligned}
|z-2|=1 \quad &\Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2+b^2}=1\\
&\Leftrightarrow (a-2)^2+b^2=1\\
&\Leftrightarrow b^2=1-(a-2)^2\\
&\Leftrightarrow b=\sqrt{1-(a-2)^2}\ \vee\ b=-\sqrt{1-(a-2)^2}
\end{aligned}$$

Pero $b\in\mathbb{R}$, por lo que debemos tener que $1-(a-2)^2\geq 0$, desarrollemos esta desigualdad

$$1-(a-2)^2\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (a-2)^2\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad a\in[1,3]$$

Por lo tanto las soluciones son

$$\{a+i\sqrt{1-(a-2)^2}\mid 1\leq a\leq 3\}\cup\{a-i\sqrt{1-(a-2)^2}\mid 1\leq a\leq 3\}$$

2. Tenemos que resolver la ecuación $z^5=i\Leftrightarrow z=i^{\frac{1}{5}}$, para esto escribamos i en forma polar:

$$r=|i|=1 \quad\wedge\quad Arg(i)=\frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ i=e^{i(\frac{\pi}{2})}=e^{\frac{i(\pi}{2+2k\pi)}},k\in\mathbb{Z}$$

Luego $i^{\frac{1}{5}}$ toma los valores

$$w_k = 1^{\frac{1}{5}} e^{i(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2\pi k}{5})} \qquad \text{para } k = 0,1,2,3,4$$

(sabemos que para los otros $k \in \mathbb{Z}$ obtendremos los mismos w)
Es decir, z puede tomar los valores:

$\cdot\ k = 0:$ $\qquad w_0 = e^{i(\frac{\pi}{10})}$

$\cdot\ k = 1:$ $\qquad w_1 = e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5})} = e^{i(\frac{5\pi}{10})} = e^{i(\frac{\pi}{2})}$

$\cdot\ k = 2:$ $\qquad w_2 = e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi}{5})} = e^{i(\frac{9\pi}{10})}$

$\cdot\ k = 3:$ $\qquad w_3 = e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{6\pi}{5})} = e^{i(\frac{13\pi}{10})}$

$\cdot\ k = 4:$ $\qquad w_4 = e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{8\pi}{5})} = e^{i(\frac{17\pi}{10})}$

$\square$

P2)

1. Demuestre que para $n \geq 2$ la suma de las raices n-ésimas de la unidad es igual a cero.

2. Demuestre que las raices n-ésimas de un número complejo cualquiera $Z \in \mathbb{C}$, son el producto se una raiz particular $z_0 \in \mathbb{C}$ por una raiz n-ésima de la unidad.

3. Concluya que la suma de las raices n-ésimas de un complejo cualquiera, es igual a cero.

Solución:

1. Para $z = 1$, $r = |z| = 1$ y $Arg(z) = \theta = 0$, entonces como las raices n-ésimes de un complejo $z \neq 0$ son $w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$ para $k = 0, ..., n-1$, obtenemos que las raices n-ésimas de la unidad son:

$$w_k = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad \text{para } k = 0,1,...,n-1$$

Asi, la suma de las raices n-ésimas de la unidad es

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} w_k &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(\frac{2k\pi}{n})} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i(\frac{2\pi}{n})})^k \\
&= \frac{1-(e^{i(\frac{2\pi}{n})})^n}{1-e^{i(\frac{2\pi}{n})}} \\
&= \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i(\frac{2\pi}{n})}} \\
&= \frac{1-cos(2\pi)-isen(2\pi)}{1-e^{i(\frac{2\pi}{n})}} \\
&= \frac{1-1-0}{1-e^{i(\frac{2\pi}{n})}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Notar que en el desarrollo anterior usamos que $n \geq 2$, pues si n pudiera tomar el valor 1, no podriamos haber usado la fórmula

$$\sum_{k=0}^{m} r^k = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$$

que es la que usamos en el segundo paso, pues ésta es válida para $r \neq 1$.

2. · $z = 0$: directo, pues la única raiz n-ésima del cero es el cero.

   · $z \neq 0$: entonces z es de la forma $z = re^{i\theta}$ con $r \neq 0$ y sus raices n-ésimas son

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} e^{\frac{i2k\pi}{n}} \qquad k = 0, ..., n-1$$

   Como $w_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}}$, tenemos que las raices n-ésimas de z son:

$$w_k = w_0 e^{\frac{i2k\pi}{n}} \qquad k = 0, ..., n-1$$

   En la parte (a) vimos que las raices de la unidad son:

$$v_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}} \qquad k = 0, ..., n-1$$

   Asi, las raices n-ésimas de z son:

$$w_k = w_0 v_k \qquad k = 0, ..., n-1$$

   Es decir, las raices n-ésimas de un complejo z son las raices n-ésimas de la unidad multiplicadas por su raiz n-ésima correspondiente a evaluar en $k = 0$.

3. Sea $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, w_k con $k \in \{0, ..., n-1\}$ sus raices n-ésimas y v_k con $k \in \{0, ..., n-1\}$ las raices n-ésimas de la unidad. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} w_k &= \sum_{k=0}^{n-1} r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} v_k \qquad (por\ (b)) \\
&= r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} v_k \\
&= r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}} 0 \qquad (por\ (a)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

P3)

1. Calcule $(1 + i\sqrt{3})^{36}$
2. Calculando $(1 - i)^n$ demuestre que

$$(\sqrt{2})^n cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}, k \leq \frac{n}{2}} \binom{n}{2k} (-1)^k$$

$$(\sqrt{2})^n sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}, k \leq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} (-1)^k$$

3. Calcular $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$

Solución:

1. Sea $z = 1 + i\sqrt{3}$ calculemos su forma polar:

$r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$

$tg(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{1}$ y z está en el primer cuadrante $\Rightarrow$ $Arg(z) = \theta = \frac{\pi}{3}$

Luego $z = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
z^{36} &= (2e^{\frac{i\pi}{3}})^{36} \\
&= 2^{36} e^{\frac{i\pi 36}{3}} \\
&= 2^{36} e^{i\pi 12} \\
&= 2^{36} (e^{2i\pi})^6 \\
&= 2^{36} 1^6 \\
&= 2^{36}
\end{aligned}$$

2. Por el Teorema del binomio, tenemos que

$$\begin{aligned}(1-i)^n &= \textstyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-i)^k\\ &= \tbinom{n}{0}+\tbinom{n}{1}(-i)+\tbinom{n}{2}(-i)^2+\tbinom{n}{3}(-i)^3+\tbinom{n}{4}(-i)^4+\tbinom{n}{5}(-i)^5+...+\tbinom{n}{n}(-i)^n\\ &= 1-i\tbinom{n}{1}-\tbinom{n}{2}+i\tbinom{n}{3}+\tbinom{n}{4}-i\tbinom{n}{5}-\tbinom{n}{6}+i\tbinom{n}{7}+...+(-i)^n\end{aligned}$$

Antes de seguir notemos lo siguiente, como $(-i)^4 = 1$ tenemos que:

Haciendo $k = 2l:\ (-i)^{2l} = (-1)^l; l \in \mathbb{N}$ (*)
Haciendo $k = 2l+1:\ (-i)^{2l+1} = (-i)(-1)^l; l \in \mathbb{N}$

Por lo tanto los términos que acompañan a los coeficientes combinatoriales se van repitiendo (repite la serie $1, -i, -1, i$). Asi, sabemos cúales son los signos de cada término y si va multiplicado por una i o no. Ahora que tenemos claro el comportamiento de los coeficientes, escribamos $(1-i)^n$ separando la parte real e imaginaria:

$$(1-i)^n = \left[1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\binom{n}{8}+...\right]+(-i)\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+...\right]$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N},k\leq\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}(-1)^k+(-i)\sum_{k\in\mathbb{N},k\leq\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}(-1)^k$$

Para entender la última igualdad, notemos que si n es par, entonces $(-i)^n$ es real (ver (*)), por lo tanto el último término pertenece a la parte real, lo que concuerda con la igualdad en cuestión, ya que si n es par entonces $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$, por lo que el último término aparecerá en la parte real (el razonamiento es análogo si n es impar).
Calculemos ahora $(1-i)^n$ usando su forma polar. Sea $z = (1-i)$

$r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$tg(\theta) = -1$ y z está en el cuarto cuadrante $\Rightarrow\ \theta = \frac{-\pi}{4}$

$$\begin{aligned}(1-i)^n = z^n &= (\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}})^n\\ &= (\sqrt{2})^n(e^{\frac{-i\pi}{4}})^n\\ &= (\sqrt{2})^n\left(cos\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)-isen\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)\right)\\ &= (\sqrt{2})^n cos\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)-i(\sqrt{2})^n sen\left(\tfrac{n\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Asi, tenemos dos expresiones para $(1-i)^n$. Luego sus partes reales e imaginarias deben coincidir, con lo que obtenemos que

$$(\sqrt{2})^n cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N},k\leq\frac{n}{2}}\binom{n}{2k}(-1)^k$$

$$(\sqrt{2})^n sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}, k\leq\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1}(-1)^k$$

3. Para calcular $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}$, veamos la forma polar de $z = 1+i\sqrt{3}$ y $z' = 1-i\sqrt{3}$

   $r = |z| = |z| = \sqrt{1+3} = 2$

   $Arg(z) = \frac{\pi}{3}$ y $Arg(z') = \frac{-\pi}{3}$

   Luego,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z}{z'}\right)^{10} &= (\frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{2e^{\frac{-i\pi}{3}}})^{10} \\
&= (e^{\frac{i\pi}{3}-(\frac{-i\pi}{3})})^{10} \\
&= (e^{\frac{i2\pi}{3}})^{10} \\
&= e^{\frac{i20\pi}{3}} \\
&= e^{i\pi(6+\frac{2}{3})} \\
&= e^{i6\pi}e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
&= 1e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
&= cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

□

P4) 1. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y considere $n \geq 1$. Probar que

$$\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+(\bar{z})^n}$$

(donde $\bar{z}$ es el conjugado de z) es un número real.

2. Sean z_1 y z_2 complejos tales que $|z_1| = |z_2| = 1$. Pruebe que $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|$ si y sólo si $z_1 = z_2$.

Solución:

1. De las propiedades de los conjugados tenemos que:

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n \quad \Rightarrow \quad \overline{1+z^n} = 1 + (\overline{z})^n \quad \Rightarrow \quad \overline{\left(\frac{1}{1+z^n}\right)} = \frac{1}{1+(\overline{z})^n}$$

   Por lo tanto

$$\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+(\overline{z})^n} = \frac{1}{1+z^n} + \overline{\left(\frac{1}{1+z^n}\right)} = 2Re\left(\frac{1}{1+z^n}\right) \in \mathbb{R}$$

   Notar que $1 + z^n \neq 0$, ya que estamos trabajando con $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$, por lo que no hay problema de indefinición.

2. Probemos las dos implicancias
   ($\Leftarrow$) Suponemos $z_1 = z_2$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |2z_1| \\ &= 2|z_1| \\ &= |z_1| + |z_1| \\ &= |z_1| + |z_2| \end{aligned}$$

   Por lo tanto $z_1 = z_2 \;\Rightarrow\; |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

   ($\Rightarrow$) Suponemos que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}) \\ &= 2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) \end{aligned}$$

   Por otro lado, $(|z_1| + |z_2|)^2 = (1+1)^2 = 4$

   Ahora,

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \;\Rightarrow\; |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

   Por lo tanto

$$\begin{aligned} 4 = 2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) \quad &\Leftrightarrow 2 = 1 + Re(z_1\bar{z}_2) \\ &\Leftrightarrow 1 = Re(z_1\bar{z}_2) \end{aligned}$$

Asi, llegamos a que $1 = Re(z_1\bar{z}_2)$. Además, notemos que

$$|z_1\bar{z}_2| = |z_1||\bar{z}_2| = |z_1||z_2| = 1 \cdot 1 = 1$$

Veamos ahora que $1 = Re(z_1\bar{z}_2)$ y $|z_1\bar{z}_2| = 1$ implican que $z_1\bar{z}_2 = 1$:

$Re(z_1\bar{z}_2) = 1 \;\Rightarrow\; z_1\bar{z}_2 = 1 + ib$ para cierto $b \in \mathbb{R}$. Pero también tenemos que $|z_1\bar{z}_2| = 1$, luego

$$|1 + ib| = \sqrt{1 + b^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; 1 + b^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; b = 0$$

Por lo tanto tenemos que $z_1\bar{z}_2 = 1 + i0 = 1$

$$\begin{aligned}
z_1\bar{z}_2 = 1 \quad &\Rightarrow z_1^{-1}z_1\bar{z}_2 = z_1^{-1} \qquad (z_1^{-1} \textit{ existe pues } z_1 \neq 0)\\
&\Rightarrow \bar{z}_2 = z_1^{-1}\\
&\Rightarrow \bar{z}_2 = \tfrac{\bar{z}_1}{|z_1|^2}\\
&\Rightarrow \bar{z}_2 = \bar{z}_1 \qquad\qquad (|z_1| = 1)\\
&\Rightarrow z_2 = z_1
\end{aligned}$$

Resumiendo, tenemos que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \;\Rightarrow\; z_1 = z_2$ que es lo que queriamos demostrar.

$\square$

P5)
1. Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo que satisface las propiedades: $|z| = 1$ y $|z+1| = 1$. Pruebe que z es una raiz cúbica de la unidad.
2. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
   a) Probar que
   $$|1 - \bar{z}_1z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$
   b) Deducir que si $|z_1| < 1$ y $|z_2| < 1$, entonces
   $$\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1z_2|} < 1$$

Solución:

1. Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces $z = a + ib$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$

   $$|z| = 1 \;\Rightarrow\; |z|^2 = 1 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 = 1 \qquad (1)$$

   $$|z+1| = 1 \;\Rightarrow\; |z+1|^2 = 1 \;\Rightarrow\; (a+1)^2 + b^2 = 1 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 + 2a = 2$$

   Luego, combinando ambas ecuaciones

$1 + 2a = 2 \;\Rightarrow\; a = \frac{-1}{2}$. Reemplazando a en (1),

$\frac{1}{4} + b^2 = 1 \;\Rightarrow\; b = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\vee\; b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Analicemos ambos casos:

$\cdot\; b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} z = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad & \Rightarrow z = e^{\frac{i2\pi}{3}} \\ & \Rightarrow z^3 = (e^{\frac{i2\pi}{3}})^3 \\ & \Rightarrow z^3 = \left(cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\right)^3 \\ & \Rightarrow z^3 = cos(2\pi) + isen(2\pi) \\ & \Rightarrow z^3 = 1 \end{aligned}$$

$\cdot\; b = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} z = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad & \Rightarrow z = e^{\frac{-i2\pi}{3}} \\ & \Rightarrow z^3 = (e^{\frac{-i2\pi}{3}})^3 \\ & \Rightarrow z^3 = \left(cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) - isen\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)\right)^3 \\ & \Rightarrow z^3 = cos(2\pi) - isen(2\pi) \\ & \Rightarrow z^3 = 1 \end{aligned}$$

Asi, en ambos casos tenemos que $z^3 = 1$ que es lo que queriamos.

2. *a)*

$$\begin{aligned} |1 - \overline{z_1}z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 & = (1 - \overline{z_1}z_2)\overline{(1 - \overline{z_1}z_2)} - (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} \\ & = (1 - \overline{z_1}z_2)(1 - z_1\overline{z_2}) - (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ & = (1 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + |z_1|^2|z_2|^2) - (|z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2) \\ & = 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 + |z_1|^2|z_2|^2 \\ & = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2) \end{aligned}$$

b) Como $|z_1| < 1 \Rightarrow |z_1|^2 < 1 \Rightarrow (1 - |z_1|^2) > 0$. Por lo tanto tenemos que

$$0 < (1 - |z_1|^2) \wedge 0 < (1 - |z_2|^2)$$

Luego

$$0 < (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$

y por la parte anterior, tenemos que

$$0 < |1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2$$

o equivalentemente

$$0 < \underbrace{(|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2|)}_{A} \underbrace{(|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_1 - z_2|)}_{B}$$

Ahora, como $B > 0$ y $AB > 0$, entonces $A > 0$. Por lo tanto

$$|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2| > 0 \Rightarrow |1 - \bar{z}_1 z_2| > |z_1 - z_2| \Rightarrow \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|} < 1$$

Notar que no hay problema en dividir por $|1 - \overline{z_1} z_2|$, pues $|1 - \overline{z_1} z_2| > 0$. En efecto:

$$|z_1| < 1 \wedge |z_2| < 1 \Rightarrow |\overline{z_1}| \wedge |z_2| < 1 \Rightarrow |\overline{z_1} z_2| < 1 \Rightarrow -|\overline{z_1} z_2| > -1$$

Ahora, usando la propiedad de desigualdad triangular y el hecho que $|1| = 1$, obtenemos que

$$1 = |1 - \overline{z_1} z_2 + \overline{z_1} z_2| \leq |1 - \overline{z_1} z_2| + |\overline{z_1} z_2| \Rightarrow |1 - \overline{z_1} z_2| \geq 1 - |\overline{z_1} z_2| > 1 - 1 = 0.$$

□

7.2. Problemas propuestos.

P1)
1. Calcule todas las soluciones complejas de la ecuación $z^n = -1$ para $n \geq 2$.
2. Pruebe que la suma de las soluciones obtenidas en la parte i es cero.
3. Pruebe que $\frac{(1+i)^{24}}{(1-i)^{20}} = -4$

P2) Sea α una raiz séptima cualquiera de la unidad, distinta de 1. Pruebe que :

1. $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0$.
2. $\frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha^4} + \frac{\alpha^3}{1+\alpha^6} = -2$.

P3)
1. Calcule las raices de $z^2 = -i$ y expréselas de la forma $a + bi$.
2. Si $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos(\alpha)$, calcule los posibles valores de $z \in \mathbb{C}$ y muestre que
$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\alpha).$$
3. Pruebe que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $(1-i)^n + (1+i)^n \in \mathbb{R}$.

P4) Considere los números reales
$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos(k\alpha) \quad y \quad S' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} sen(k\alpha)$$

1. Probar la siguiente igualdad de números complejos
$$S + iS' = (1 + cos(\alpha) + isen(\alpha))^n$$
2. Escriba el número complejo $1 + cos(\alpha) + isen(\alpha)$ en forma polar y deduzca que
$$S = 2^n(cos(\alpha/2))^n cos(n\alpha/2) \quad y \quad S' = 2^n(cos(\alpha/2))^n sen(n\alpha/2)$$
Indicación: recuerde que $sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)cos(\alpha)$ y $cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$

P5) Sea $n > 2$, sea $a = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ y sean $X, Y \in M_{nn}(\mathbb{C})$ las matrices definidas por $(X)_{jk} = a^{(j-1)(k-1)}$ $\qquad (Y)_{jk} = a^{-(j-1)(k-1)}$.

1. Calcular X^2.
2. Calcular XY.

14. Semana 13

P1 **(a)** Si tenemos $|z| = |z+1| = 1$, elevando al cuadrado se tiene que $|z|^2 = |z+1|^2 = 1$, recordando que para $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, entonces

$$\begin{aligned}
|z+1|^2 &= 1 \\
(z+1) \cdot \overline{(z+1)} &= 1 \\
(z+1) \cdot (\overline{z} + \overline{1}) &= 1 \\
(z+1) \cdot (\overline{z} + 1) &= 1 \\
z \cdot \overline{z} + z + \overline{z} + 1 &= 1 \\
|z|^2 + z + \overline{z} + 1 &= 1 \\
1 + z + \overline{z} + 1 &= 1 \\
z &= -1 - \overline{z}
\end{aligned}$$

Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned}
z^3 &= z^2 \cdot z \\
&= z^2 \cdot (-1 - \overline{z}) \qquad \text{\textbackslash usando la igualdad anterior} \\
&= -z^2 - z \cdot z \cdot \overline{z} \\
&= -z^2 - z \cdot |z|^2 \\
&= -z^2 - z \\
&= z(-z-1) \\
&= z \cdot \overline{z} \qquad \text{\textbackslash usando la igualdad anterior} \\
&= |z|^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Se concluye que z es raíz cúbica de la unidad.

(b) Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
|1-z_2\overline{z_1}|^2 - |z_1-z_2|^2 &= (1-z_2\overline{z_1})\overline{(1-z_2\overline{z_1})} - (z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}\\
&= (1-z_2\overline{z_1})(\overline{1}-\overline{z_2\overline{z_1}}) - (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\
&= (1-z_2\overline{z_1})(1-\overline{z_2}z_1) - (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\
&= 1-\overline{z_2}z_1 - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_1}z_1\overline{z_2} - (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\
&= 1-\overline{z_2}z_1 - z_2\overline{z_1} + |z_1|^2|z_2|^2 - (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\
&= 1-\overline{z_2}z_1 - z_2\overline{z_1} + |z_1|^2|z_2|^2 - (z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2})\\
&= 1-\overline{z_2}z_1 - z_2\overline{z_1} + |z_1|^2|z_2|^2 - (|z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + |z_2|^2)\\
&= 1-\overline{z_2}z_1 - z_2\overline{z_1} + |z_1|^2|z_2|^2 - |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} - |z_2|^2\\
&= 1 + |z_1|^2|z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2\\
&= (1-|z_1|^2) - |z_2|^2 + |z_1|^2|z_2|^2\\
&= (1-|z_1|^2) - |z_2|^2(1-|z_1|^2)\\
&= (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)
\end{aligned}$$

(c) Como se tiene que $|z_1| < 1$ y $|z_2| < 1$, elevando al cuadrado se deduce que $|z_1|^2 < 1$ y $|z_2|^2 < 1$, o lo que es lo mismo $(1-|z_1|^2) > 0$ y $(1-|z_2|^2) > 0$, si multiplicamos ambas desigualdades se tiene que

$$\begin{aligned}
(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2) &> 0\\
|1-z_2\overline{z_1}|^2 - |z_1-z_2|^2 &> 0 \qquad \backslash \text{usando la igualdad anterior}\\
|1-z_2\overline{z_1}|^2 &> |z_1-z_2|^2 \qquad \backslash \cdot \frac{1}{|1-z_2\overline{z_1}|^2}\\
\frac{|1-z_2\overline{z_1}|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2} &> \frac{|z_1-z_2|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2}\\
1 &> \frac{|z_1-z_2|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2}\\
1 &> \frac{|z_1-z_2|^2}{|1-z_2\overline{z_1}|^2} \qquad \backslash\sqrt{()}\\
1 &> \frac{||z_1-z_2||}{||1-z_2\overline{z_1}||}\\
1 &> \frac{|z_1-z_2|}{|1-z_2\overline{z_1}|}
\end{aligned}$$

P2 Por propiedad de los complejos si $z \in \mathbb{C}$ y $z = \overline{z}$ entonces $z \in \mathbb{R}$, procedemos entonces a obtener el conjugado de la expresión, llamemos $w = \frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\overline{z}^n}$, luego

$$
\begin{aligned}
\overline{w} &= \overline{\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\overline{z}^n}} \\
&= \overline{\frac{1}{1+z^n}} + \overline{\frac{1}{1+\overline{z}^n}} && \backslash \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \\
&= \frac{\overline{1}}{\overline{1+z^n}} + \frac{\overline{1}}{\overline{1+\overline{z}^n}} && \backslash \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \\
&= \frac{1}{\overline{1+z^n}} + \frac{1}{\overline{1+\overline{z}^n}} && \backslash \text{el conjugado de un número real es el mismo número} \\
&= \frac{1}{\overline{1}+\overline{z^n}} + \frac{1}{\overline{1}+\overline{\overline{z}^n}} \\
&= \frac{1}{1+\overline{z^n}} + \frac{1}{1+\overline{\overline{z}^n}} \\
&= \frac{1}{1+\overline{z}^n} + \frac{1}{1+\overline{\overline{z}}^n} && \backslash \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \text{ inductivamente } \overline{z^n} = \overline{z}^n \\
&= \frac{1}{1+\overline{z}^n} + \frac{1}{1+z^n} && \backslash \overline{\overline{z}} = z \\
&= \frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\overline{z}^n} \\
&= w
\end{aligned}
$$

Se concluye que $w \in \mathbb{R}$.

P3 **(a)** Sean $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ y $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ las representaciones polares de z_1 y z_2 respectivamente, el ángulo entre z_1 y z_2, es decir entre θ_1 y θ_2, puede ser $\theta_1 - \theta_2$ o $\theta_2 - \theta_1$ (dependiendo si $\theta_1 > \theta_2$ o si $\theta_2 > \theta_1$ respectivamente), supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\theta_1 > \theta_2$, con esto $\theta_1 - \theta_2 = \phi$, recordar que $\overline{z_2} = \overline{|z_2|e^{i\theta_2}} = |z_2|e^{-i\theta_2}$ luego $z_1 \cdot \overline{z_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1-\theta_2)} = |z_1||z_2|e^{i\phi}$. Notemos que el conjugado de $z_1 \cdot \overline{z_2}$ es $\overline{z_1} \cdot z_2$, con esto $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 2Re(|z_1||z_2|e^{i\phi}) = 2|z_1||z_2|Re(e^{i\phi}) = 2|z_1||z_2|\cos\phi$. Notar que como coseno es par, $\cos\phi = \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_2 - \theta_1)$ con lo cual se deduce que sin importar las condiciones de los ángulos se llega al mismo resultado.

(b)

$$
\begin{aligned}
|s|^2 &= |u-v|^2 \\
&= (u-v)\overline{(u-v)} \\
&= (u-v)(\overline{u}-\overline{v}) \\
&= u\overline{u} - u\overline{v} - v\overline{u} + v\overline{v} \\
&= u\overline{u} + v\overline{v} - (u\overline{v} + v\overline{u}) \\
&= |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\phi && \backslash \text{usando la parte (a)}
\end{aligned}
$$

P4 La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $z_1 \in \mathbb{C}$ es claro que $|z_1| = |z_1| \Leftrightarrow z_1 \mathcal{R} z_1$.
- Simétrica: Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, como $z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z_2| = |z_1| \Leftrightarrow z_2 \mathcal{R} z_1$.
- Transitiva: Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, como $z_1 \mathcal{R} z_2$ y $z_2 \mathcal{R} z_3$ se tiene que $|z_1| = |z_2| = |z_3| \Rightarrow |z_1| = |z_3| \Leftrightarrow z_1 \mathcal{R} z_3$.

Luego la relación es de equivalencia, para la clase de equivalencia de z_0 tenemos que

$$[z_0]_{\mathcal{R}} = \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; z_0 \mathcal{R} z\} = \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; |2 + i\sqrt{5}| = |z|\} = \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; |z| = 3\}$$

Dado que $z = x + iy$ esto quiere decir que $|x + iy| = 3$ o lo que es lo mismo $x^2 + y^2 = 3^2$, esto describe una circunfenrencia de radio 3 centrada en el origen.

P5 Basta demostrar que $z = \overline{z}$

$$\begin{aligned}
|z+i| &= |z-i| \\
|z+i|^2 &= |z-i|^2 \\
(z+i)\overline{(z+i)} &= (z-i)\overline{(z-i)} \\
(z+i)(\overline{z}-i) &= (z-i)(\overline{z}+i) \\
z\overline{z} - zi + i\overline{z} - i^2 &= z\overline{z} + zi - i\overline{z} - i^2 \\
-zi + i\overline{z} - i^2 &= zi - i\overline{z} - i^2 \\
-zi + i\overline{z} - (-1) &= zi - i\overline{z} - (-1) \\
-zi + i\overline{z} + 1 &= zi - i\overline{z} + 1 \\
-zi + i\overline{z} &= zi - i\overline{z} \\
2\overline{z}i &= 2zi \qquad \backslash \cdot 2i \\
-4\overline{z} &= -4z \\
\overline{z} &= z
\end{aligned}$$

Se concluye que $z \in \mathbb{R}$.

P6

$$\begin{aligned}
(1-i)^4(1+i)^4 &= [(1-i)(1+i)]^4 \\
&= (1^2 - i^2)^4 \\
&= (1-(-1))^4 \\
&= 2^4 \\
&= 16
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
1+i+\frac{i-1}{|1-i|^2+i} &= 1+i+\frac{i-1}{(1-i)\overline{(1-i)}+i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{(1-i)(1+i)+i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{1^2-i^2+i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{2+i} \qquad \backslash\cdot\frac{2-i}{2-i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\\
&= 1+i+\frac{(i-1)(2-i)}{2^2-i^2}\\
&= 1+i+\frac{2i-i^2-2+i}{5}\\
&= 1+i+\frac{3i-1}{5}\\
&= 1+i+\frac{3i}{5}-\frac{1}{5}\\
&= \frac{4}{5}+\frac{8i}{5}
\end{aligned}
$$

P7 (a)

$$
\begin{aligned}
S+iS' &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\cdot\alpha)+i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\cdot\alpha)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(k\cdot\alpha)+i\sin(k\cdot\alpha))\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\alpha}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\alpha}\cdot 1^{n-k} \qquad \backslash 1^{n-k}=1\\
&= (e^{i\alpha}+1)^n\\
&= (\cos\alpha+i\sin\alpha+1)^n
\end{aligned}
$$

(b) Usando la indicación se tiene que

$$\begin{aligned}
(\cos\alpha + i\sin\alpha + 1)^n &= (\cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) + 1)^n \\
&= (\cos^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) + 1 - \sin^2(\alpha/2))^n \\
&= (\cos^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2))^n \\
&= (2\cos^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2))^n \\
&= [2\cos(\alpha/2)(\cos(\alpha/2) + i\sin(\alpha/2))]^n \\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(\cos(\alpha/2) + i\sin(\alpha/2))^n \\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(e^{i\alpha/2})^n \\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(e^{in\cdot\alpha/2}) \\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(\cos(n\cdot\alpha/2) + i\sin(n\cdot\alpha/2)) \\
S + iS' &= 2^n\cos^n(\alpha/2)\cos(n\cdot\alpha/2) + i2^n\cos^n(\alpha/2)\sin(n\cdot\alpha/2)
\end{aligned}$$

Recordemos que esta expresión es equivalente con $S + iS'$, luego igualando partes real e imaginaria con sus respectivos términos se tiene que $S = 2^n\cos^n(\alpha/2)\cos(n\cdot\alpha/2)$ y $S' = 2^n\cos^n(\alpha/2)\sin(n\cdot\alpha/2)$.

P8 Primero podemos expresar como sumatoria ambas expresiones

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + ... + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n} = S$$

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \sin\frac{6\pi}{n} + ... + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2\pi k}{n} = S'$$

Procedemos a sumar $S + iS'$, esto nos entrega

$$\begin{aligned}
S + iS' =& \sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{2\pi k}{n} \\
=& \sum_{k=1}^{n-1} \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right) \\
=& \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2\pi k i}{n}} \\
=& \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2\pi k i}{n}} + 1 - 1 \qquad \backslash\text{sumar } 0 \\
=& \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi k i}{n}} - 1 \qquad \backslash\text{incorporando primer término a la sumatoria} \\
=& \frac{(e^{\frac{2\pi i}{n}})^n - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} - 1 \qquad \backslash\text{geométrica} \\
=& \frac{e^{2\pi i} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} - 1 \\
=& \frac{1 - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} - 1 \\
S + iS' =& -1
\end{aligned}$$

Ahora si igualamos partes real e imaginaria se tiene que $S' = 0$ (el resultado no tiene componente imaginaria) y $S = -1$, tal cual queríamos demostrar.

P9 **(a)** Como z es raź n-ésima quiere decir que $z^n = 1$, si n es divisor de m, entonces $m = n \cdot k$ con $k \in \mathbb{Z}$, entonces se tiene que $z^m = z^{n\cdot k} = (z^n)^k = (1)^k = 1$, con lo que se concluye que z es raíz m-ésima de la unidad.

(b) Sean $z_1, z_2 \in U$ esto quiere decir que existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $z_1^{n_1} = 1$ y $z_2^{n_2} = 1$, hay que demostrar que $z_1 \cdot z_2^{-1} \in U$, es decir, encontrar un $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ tal que $(z_1 \cdot z_2^{-1})^n = 1$, en efecto, tomando $n = n_1 \cdot n_2$ se tiene que $(z_1 \cdot z_2^{-1})^n = (z_1 \cdot \frac{1}{z_2})^{n_1 \cdot n_2} = \frac{z_1^{n_1 \cdot n_2}}{z_2^{n_1 \cdot n_2}} = \frac{(z_1^{n_1})^{n_2}}{(z_2^{n_2})^{n_1}} = \frac{1^{n_2}}{1^{n_1}} = 1$. Se concluye que $(U, \cdot)$ es subgrupo de $(S, \cdot)$.