MA1101-6 Introducción al Álgebra 2023, Otoño
Profesora: Leonardo Sánchez
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón y Colaboración Marcelito Navarro
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 13:Complejos

Ya no hay días buenos o malos, solo hay matraca

01.- Números Complejos

[Formalidad]: Identificamos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, de manera que se definen las operaciones $+$ y $\cdot$ para $z = (a, b), w = (c, d) \in \mathbb{C}$ por:

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c, b + d) \\ z \cdot w &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

[Unidad Imaginaria]: Se define $i = (0, 1)$

[Forma cartesiana]: La expresión $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ es la forma cartesiana de $z = (a, b)$.
Ademas se define:

- $Re(z) = a$ (Parte real)
- $Im(z) = b$ (Parte imaginaria)

[Coordenadas Polares]: Para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se define el par $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ donde:

- r es la distancia de z al origen, se llama modulo de z y se anota $r = |z|$.
- θ es el angulo que se forma entre el eje X (real) y el segmento que une el origen con z. Se llama argumento (principal) de z y se anota $arg(z)$.

[Forma polar]: Para $\theta \in \mathbb{R}$ anotamos $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. La expresión $|z|e^{iarg(z)}$ es la forma polar de z.

[Props varias]:

I) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i\alpha+\beta}$

II) $|zw| = |z| \cdot |w|$

III) $arg(zw) \equiv arg(z) + arg(w)\ (mod\ 2\pi)$

IV) $|z^k| = |z|^k$

V) $(e^{i\theta})^k = e^{i(k\theta)}$

[Conjugado]: Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se define $\overline{z} = a - bi$

[Función Conjugado]: La conjugación es un automorfismo en $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, es autoinversa y restringida a $\mathbb{R}$ es la identidad.

[Desigualdad triangular]: Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $|z + w| \leq |z| + |w|$.

[Raices: Sean $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raíz $n-$esima de w si $z^n = w$.

[Soluciones]: Sean $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$, si $w = re^{i\theta}$ (forma polar) entonces la ecuación $z^n = w$ tiene n soluciones, dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{(\theta+2\pi k)}{n}}$$

[Prop]: Sean $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$, entonces la suma de las raíces n-ésimas vale 0:

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$$

[Muchas propiedades]: Sean $z, w \in \mathbb{C}$

a) $\overline{\overline{z}} = z$.

b) $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.

c) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ y $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$.

d) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. Si $w \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

e) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$.

f) $Re(z) = Re(\overline{z})$ y $Im(z) = -Im(\overline{z})$.

g) $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ y $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

h) Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{1}{|z|} e^{-iarg(z)}$

i) $|z| = |\overline{z}|$

j) $arg(\overline{z}) = 2\pi - arg(z)$

k) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

l) Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

m) Si $w \neq 0$, entonces $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

P1. MÓDULO COMÚN:

a) Demuestre que las raíces en $\mathbb{C}$ de la ecuación de segundo grado $z^2 + z + 1 = 0$, son las raíces cúbicas de la unidad, distintas de 1.

b) Sea $z \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica de la unidad, con $z \neq 1$. Pruebe que

$$(1+z)^3 + (1+z^2)^9 + (1+z^3)^6 = 62.$$

P2. a) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, (1-i)^n + (1+i)^n \in \mathbb{R}$.

b) Encuentre los valores $n \in \mathbb{N}$ que satisfacen la ecuación

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3}.$$

P3. a) Sean $n \geq 2$ un natural, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un complejo dado, y $\{z_0, \ldots, z_{n-1}\}$ las raíces n-ésimas de z. Calcular:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k}.$$

b) Sean z_1, z_2 las soluciones de $z^2 - 2z + 2 = 0$. Demuestre que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\},\quad \frac{((\theta) + z_1 - 1)^n - ((\theta) + z_2 - 1)^n}{z_1 - z_2} = \operatorname{sen}(n\theta)(\csc(\theta))^n,$$

donde (θ) y $\csc(\theta)$ son, respectivamente, la cotangente y la cosecante de θ.

P4. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ complejos unitarios, y $u, v \in \mathbb{C}$, tales que:

$$z_1 + z_2 = -u,$$
$$z_1 \cdot z_2 = v.$$

a) Muestre que $|u| \leq 2$ y que $|v| = 1$.
b) Muestre que $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{u}{v}$.
c) Muestre que $u = \overline{u} \cdot v$.
d) Si las formas polares de u y v son $|u|e^{i\varphi}$ y $|v|e^{i\theta}$ respectivamente, muestre que $\theta = 2\varphi + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

P5. Para $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 2$, denotemos por U_k el conjunto de las raíces k-ésimas de la unidad. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, con $m, n \geq 1$, y sea S el conjunto de soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $z^m = \overline{z}^{\,n}$. Muestre que:

a) Si $m \neq n$, $S = U_{m+n} \cup \{0\}$.
b) Si $m = n$, $S = [0, \infty) \cdot U_{2m}$, donde $[0, \infty) \cdot U_{2m} = \{\, r \cdot \omega \mid r \in [0, \infty) \wedge \omega \in U_{2m} \,\}$.

P6. [Factorización en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$]

a) Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$
b) Considere el polinomio $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$. Se sabe que i es raiz de $p(x)$ de multiplicidad 2. Encuentre todas las raices y factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$

P7. Calcular los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ sea divisible por $q(x) = x^2 + 2x + 1$.

P8. Suponemos que $P \in \mathbb{R}[x], gr(P) \geq 4, a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Se sabe que

i) $P(x) = Q_1(x)(x^2 - b^2) + cx$
ii) $P(x) = Q_2(x)(x^2 - b^2)(x - a) + R(x)$, con R mónico.

Encuentre $R(x)$.

P9. Sabiendo que la ecuación $z^3 - 9z^2 + 33z = 65$ admite una solución en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de módulo $\sqrt{13}$, determina todas las raíces de la ecuación.

P10. Sea $P(x)$ un polinomio que tiene resto A cuando se lo divide por $(x - a)$ y tiene resto B cuando se lo divide por $(x - b)$. Encuentre el resto $R(x)$ cuando el polinomio es dividido por $(x - a)(x - b)$. Suponga que $a \neq b$.

P11. Sea $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polinomio con coeficientes reales. Sea $R(x)$ tal que

$$P(x) = (x - 1)Q(x) + R(x).$$

Si $R(4) = 0$ y $x = i$ es raíz de $P(x)$, calcule a, b, c.

P12. Si $n = 3k \pm 1$, para algún $k \in \mathbb{N}$, probar que $x^{2n} + 1 + (x + 1)^{2n}$ es divisible por $x^2 + x + 1$.

Ejericios Resueltos y parte Pauta

Complejos

P1. Escriba en su forma cartesiana los siguientes complejos:

a) $(1-i)^4(1+i)^4$ *b*) $\dfrac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}}$ *c*) $1+i+\dfrac{i-1}{|i-1|^2+i}$

P2. Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{a+ib}+\frac{2}{a-ib}=1+i$$

P3. *a*) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1+i)^n+(1-i)^n \in \mathbb{R}$$

b) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|>1 \ \wedge \ (z)>0$. Demuestre que

$$(z+\frac{1}{z})>0$$

c) Sea $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demuestre que

1) $(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2) \in \mathbb{R}$
2) $|z_1|^2+|z_2|^2 \geq z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$

P4. Encuentre las raíces cuartas del complejo $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

P5. Demuestre que las soluciones de la ecuación $x^2+x+1=0$ son raíces cúbicas de la unidad distintas de 1

P6. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raiz cubica de la unidad con $w \neq 1$. Pruebe que

$$(1+w)^3+(1+w^2)^9+(1+w^3)^6=62$$

P7. Calcule $cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$. *Hint: Utilice las raíces quintas de la unidad de manera adecuada.*

P8. Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ las raíces n-ésimas de la unidad ordenadas de manera usual (es decir, según argumento de manera creciente).

a) Demuestre que:

$$w_0w_1+w_1w_2+\ldots+w_{n-2}w_{n-1}+w_{n-1}w_0=0$$

b) Pruebe que $\forall k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$:

$$\sum_{j=0}^{n-1}(w_j)^k=0$$

c) **[Propuesto]** Sea $z \in \mathbb{C}$ fijo. Pruebe que:

$$\sum_{j=0}^{n-1}(z+w_j)^n=n(z^n+1)$$