12. Semana 11

P1 Solamente basta demostrar que es conmutativo, utilizando la indicación tenemos que

$$\begin{aligned}(a*b)*(b*a) &= a*(b*b)*a \qquad \backslash\text{por asociatividad}\\ &= a*e*a\\ &= a*a\\ &= e\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}(b*a)*(a*b) &= b*(a*a)*b \qquad \backslash\text{por asociatividad}\\ &= b*e*b\\ &= b*b\\ &= e\end{aligned}$$

Se puede concluir entonces que $(a*b)^{-1} = b*a$, sin embargo, por la propiedad del enunciado, el inverso de cada elemento del grupo es el mismo elemento, es decir $(a*b)^{-1} = a*b$, juntando ambas igualdades se tiene que $a*b = b*a$, se concluye que $(G,*)$ es grupo abeliano.

P2 Como es grupo todo elemento posee inverso, supongamos que el inverso de a no es b, esto quiere decir que $a*b \neq e$, lo que significa que $a*b = a$ o $a*b = b$, pero

$$\begin{aligned}a*b &= a \qquad \backslash\text{operando con el inverso de } a \text{ por la izquierda } a^{-1}*\\ (a^{-1}*a)*b &= a^{-1}*a \qquad \backslash\text{por asociatividad}\\ e*b &= e\\ b &= e\end{aligned}$$

De manera análoga

$$\begin{aligned}a*b &= b \qquad \backslash\text{operando con el inverso de } b \text{ por la derecha } b^{-1}*\\ a*(b*b^{-1}) &= a*(b*b^{-1}) \qquad \backslash\text{por asociatividad}\\ a*e &= e\\ a &= e\end{aligned}$$

En ambos casos nos lleva a una contradicción, se concluye que $a^{-1} = b$.

P3 **(a)** Si $(G\times H, \triangle)$ es grupo debemos demostrar asociatividad, existencia de neutro e inverso.

- Asociatividad: Sean $(a,b),(c,d),(e,f) \in G\times H$

$$\begin{aligned}(a,b)\triangle[(c,d)\triangle(e,f)] &= (a,b)\triangle(c*e, d\circ f)\\ &= (a*(c*e), b\circ(d\circ f))\\ &= ((a*c)*e, (b\circ d)\circ f) \qquad \backslash\text{por asociatividad de } G \text{ y } H\\ &= (a*c, b\circ d)\triangle(e,f)\\ &= [(a,b)\triangle(c,d)]\triangle(e,f)\end{aligned}$$

- Neutro: El neutro es el par ordenado que contiene los neutros respectivos de cada grupo, en efecto, sean $(a,b),(e_G,e_H) \in G \times H$, se tiene que

$$\begin{aligned}(a,b) \triangle (e_G,e_H) &= (a * e_G, b \circ e_H)\\ &= (a,b)\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(e_G,e_H) \triangle (a,b) &= (e_G * a, e_H \circ b)\\ &= (a,b)\end{aligned}$$

Se concluye que el neutro es (e_G,e_H).

- Inverso: Sea $(a,b) \in G \times H$ y sean a^{-1} y b^{-1} los inversos de a y b en G y H respectivamente (existen porque G y H son grupos), tomando el par ordenado $(a^{-1},b^{-1}) \in G \times H$ se tiene que

$$\begin{aligned}(a,b) \triangle (a^{-1},b^{-1}) &= (a * a^{-1}, b \circ b^{-1})\\ &= (e_G,e_H)\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(a^{-1},b^{-1}) \triangle (a,b) &= (a^{-1} * a, b^{-1} \circ b)\\ &= (e_G,e_H)\end{aligned}$$

Se concluye que el inverso es (a^{-1},b^{-1}).

Con esto se tiene que $(G \times H, \triangle)$ es grupo.

(b) Para φ

- Morfismo: Sean $(a,b),(c,d) \in G \times H$ se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi((a,b) \triangle (c,d)) &= \varphi(a * c, b \circ d)\\ &= a * c\\ &= \varphi(a,b) * \varphi(c,d)\end{aligned}$$

- Sobreyectivo: $(\forall y \in G)(\exists x \in G \times H)(\varphi(x) = y)$ En efecto, basta tomar $x = (y,h)$, con esto se tiene que $\varphi(x) = \varphi(y,h) = y$.

Para ψ

- Morfismo: Sean $(a,b),(c,d) \in G \times H$ se tiene que

$$\begin{aligned}\psi((a,b) \triangle (c,d)) &= \psi(a * c, b \circ d)\\ &= b \circ d\\ &= \psi(a,b) \circ \psi(c,d)\end{aligned}$$

- Sobreyectivo: $(\forall y \in H)(\exists x \in G \times H)(\psi(x) = y)$ En efecto, basta tomar $x = (g, y)$, con esto se tiene que $\psi(x) = \psi(g, y) = y$.

(c) $\Rightarrow$ Sean $(a^{-1}, e), (b^{-1}, e) \in G \times G$ con e el neutro en G, se tiene que como es morfismo $f((a^{-1}, e) \triangle (b^{-1}, e)) = f(a^{-1}, e) * f(b^{-1}, e)$, pero $f((a^{-1}, e) \triangle (b^{-1}, e)) = f(a^{-1} * b^{-1}, e * e) = (a^{-1} * b^{-1} * e * e)^{-1} = (a^{-1} * b^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1} * (a^{-1})^{-1} = b * a$, por otro lado, $f(a^{-1}, e) * f(b^{-1}, e) = (a^{-1} * e)^{-1} * (b^{-1} * e)^{-1} = (a^{-1})^{-1} * (b^{-1})^{-1} = a * b$, juntando ambas igualdades se tiene que $a * b = b * a$.

$\Leftarrow$ Sean $(a, b), (c, d) \in G \times G$, se tiene que

$$\begin{aligned}
f((a,b) \triangle (c,d)) &= f(a * c, b * d) \\
&= (a * c * b * d)^{-1} \\
&= (a * b * c * d)^{-1} && \backslash \text{por ser grupo abeliano} \\
&= (c * d)^{-1} * (a * b)^{-1} \\
&= (a * b)^{-1} * (c * d)^{-1} && \backslash \text{por ser grupo abeliano} \\
&= f(a, b) * f(c, d)
\end{aligned}$$

P4 $\Rightarrow$ Tomemos $h^{-1}, g^{-1} \in G$, se tiene que como f es isomorfismo $f(h^{-1} * g^{-1}) = f(h^{-1}) * f(g^{-1}) = (h^{-1})^{-1} * (g^{-1})^{-1} = h * g$, por otro lado, por definición de la función y propiedad de inversos, $f(h^{-1} * g^{-1}) = (h^{-1} * g^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1} * (h^{-1})^{-1} = g * h$, juntando ambas expresiones se tiene que $h * g = g * h$.

$\Leftarrow$ Tomemos $h, g \in G$, luego $g * h = (g^{-1})^{-1} * (h^{-1})^{-1} = (h^{-1} * g^{-1})^{-1} = f(h^{-1} * g^{-1})$, por otro lado, $h * g = (h^{-1})^{-1} * (g^{-1})^{-1} = f(h^{-1}) * f(g^{-1})$, pero como es grupo abeliano se tiene que $h * g = g * h$, juntando ambas expresiones se tiene que $f(h^{-1}) * f(g^{-1}) = f(h^{-1} * g^{-1})$, es decir, es morfismo, falta ver que sea biyectivo.

- Inyectivo: $(\forall g_1 . g_2 \in G)(f(g_1) = f(g_2) \Rightarrow g_1 = g_2)$, en efecto, sean $g_1, g_2 \in G$, se tiene que

$$\begin{aligned}
f(g_1) &= f(g_2) \\
g_1^{-1} &= g_2^{-1} && \backslash \text{tomando inverso (existe porque } g_1 \text{ y } g_2 \text{ son biyectivas) } ()^{-1} \\
g_1 &= g_2
\end{aligned}$$

- Epiyectivo: $(\forall h \in G)(\exists g \in G)(f(g) = h)$, en efecto, sea $h \in G$, basta tomar $g = h^{-1}$ que sabemos que existe porque h es función biyectiva, con esto se tiene que $f(g) = f(h^{-1}) = (h^{-1})^{-1} = h$.

Con lo que se concluye que f es isomorfismo.