

MA1101-6 Introducción al Álgebra 2023, Otoño

Profesor: Leonardo Sánchez

Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón

Correo: pyanez@dim.uchile.cl



Auxiliar 11: Estructuras Algebraicas y Homeomorfismos

Resumen

- **[Ley de composición interna]**: Dado $A \neq \emptyset$. Se define una l.c.i. como:

$$\begin{aligned} * : A \times A &\rightarrow A \\ (x, y) &\rightarrow x * y \end{aligned}$$

- **[Estructura algebraica]**: Si $*$ es l.c.i. en A , $(A, *)$ es llamado estructura algebraica. Si existe otra l.c.i Δ denotaremos $(A, *, \Delta)$

- **[Definiciones varias]**: Sea $(A, *)$ estructura algebraica:

- I) $*$ es **asociativa** si:

$$\forall x, y, z \in A, (x * y) * z = x * (y * z)$$

- II) $e \in A$, se dira **neutro** para $*$ si:

$$\forall x \in A, e * x = x * e = x$$

- III) Si e neutro, y $x \in A$, diremos que x tiene **inverso** si existe $y \in A$ tal que:

$$x * y = y * x = e$$

- IV) $*$ es **conmutativa** si:

$$\forall x, y \in A, x * y = y * x$$

- V) $a \in A$ es **absorbente** si:

$$\forall x \in A, x * a = a * x = a$$

- VI) $a \in A$ es **idempotente** si

$$a * a = a$$

- VII) $a \in A$ es **cancelable** si $\forall y, z \in A$:

$$\begin{aligned} a * y = a * z &\Rightarrow y = z \\ y * a = z * a &\Rightarrow y = z \end{aligned}$$

- VIII) Dado $(A, *, \Delta)$ diremos que Δ **distribuye** con respecto a $*$ si $\forall x, y, z \in A$:

$$\begin{aligned} x \Delta (y * z) &= (x \Delta y) * (x \Delta z) \\ (y * z) \Delta x &= (y \Delta x) * (z \Delta x) \end{aligned}$$

- **[Cancelabilidad]**: Sea $(A, *)$ e.a., se tiene que $a \in A$ es cancelable si y solo si las funciones $I_a(x) = a * x$ y $D_a(x) = x * a$ para $x \in A$ son inyectivas

- **[Unicidad del neutro]**: Una e.a. $(A, *)$ posee a lo más un neutro.

- **[Unicidad del inverso]**: Si la e.a. $(A, *)$ tiene neutro e y $*$ es asociativa, entonces los inversos (en el caso en que existan) son únicos.

- **[Propiedades varias]**: Si $(A, *)$ es e.a. asociativa con neutro e , entonces también cumple:

- I) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x^{-1} también. Más aún $(x^{-1})^{-1} = x$.

- II) Si $x, y \in A$ poseen inversos, entonces $x * y$ también y se tiene $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

- III) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x es cancelable.

P1. Sea $(S, *)$ una estructura algebraica con neutro e y $*$ asociativa. Para $a \in S$ fijo, invertible para $*$ y con inverso $a^{-1} \in S$ se define la operación Δ en S como sigue:

$$\forall x, y \in S, \quad x \Delta y = x * a * y.$$

I Demuestre que la ley Δ es asociativa, tiene neutro y encuéntralo.

II Caracterice los elementos invertibles para Δ y calcule el inverso de a para Δ .

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P2. a) Sea $S = \{a, b, c\}$ (donde a, b y c son todos distintos) y $*$ la ley de composición interna dada por la siguiente tabla,

$*$	a	b	c
a	c	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Determine si $*$ es asociativa en S . Identifique el elemento neutro de S , encuentre los inversos para $*$ y determine si son únicos.

I Intuición:

II Teoría:

III Matraca:

P3. a) Sea $\mathcal{G} = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$, y sea $\star$ la ley de composición interna definida por

$$a \star b = \frac{a + b}{1 + ab} \quad \forall a, b \in \mathcal{G}.$$

Demuestre que $(\mathcal{G}, \star)$ Cumple asoc, existencia neutro e inverso y verifica l.c.i.

b) Se define en $\mathbb{R}$ la ley de composición interna $*$ por:

$$x * y = \sqrt[5]{x^5 + y^5} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Muestre que la función $f(x) = x^5$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$ y que también es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, \cdot)$, donde las operaciones $+$ y $\cdot$ denotan la suma y producto usuales en $\mathbb{R}$.

I Intuición:

II Teoría:

III Matraca:

P4. a) Demuestre que para cada $k \in \mathbb{Z}$, la función $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f(q) = kq$ es un automorfismo. (Grupo Aditivo y $k \neq 0$)

b) Demuestre que $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Q}, +)$ no son isomorfos.

Resumen

- **[Homomorfismos]**: Una función $f : A \rightarrow B$ es un **morfismo** entre las estructuras algebraicas $(A, *)$ y (B, Δ) si:

$$\forall x, y \in A, f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$$

Si f es biyectiva se dirá **isomorfismo**.

- **[Props epimorfismos]**: Si $f : A \rightarrow B$ epimorfismo entre $(A, *)$ y (B, Δ) , entonces se tienen las siguientes propiedades:

- Si $(A, *)$ es asociativa, entonces (B, Δ) también lo es.
- Si $(A, *)$ es conmutativa, entonces (B, Δ) también lo es.
- Si e es neutro para $(A, *)$, entonces $f(e)$ lo es para (B, Δ) .
- Si a tiene inverso b para $(A, *)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para (B, Δ) .

- **[Props. más generales]**: Sea f un morfismo de $(A, *)$ a (B, Δ) , con neutros e_A y e_B :

- Si $e_B \in f(A)$, entonces $e_B = f(e_A)$.
- Si $e_B \in f(A)$ y $a \in A$ tiene inverso b , entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$.

- **[Composición]**: Si $f : A \rightarrow B$ un homeomorfismo de $(A, *)$ en (B, Δ) y $g : B \rightarrow C$ un homomorfismo de (B, Δ) en $(C, \bullet)$, entonces la composición de f con g , $g \circ f : A \rightarrow C$, es un morfismo de $(A, *)$ en $(C, \bullet)$.

- **[Estructuras isomorfas]**: Dos estructuras $(A, *)$ y (B, Δ) son isomorfas, denotado $(A, *) \cong (B, \Delta)$, si existe una función $f : A \rightarrow B$ isomorfismo.

Obs.: $\cong$ es una relación de equivalencia.

- **[Isomorfismo inverso]**: Si $f : A \rightarrow B$ es un isomorfismo entre $(A, *)$ y (B, Δ) , entonces $f^{-1} : B \rightarrow A$ es un isomorfismo entre (B, Δ) y $(A, *)$.

- **[Estructura de funciones]**: Sea $(B, *)$ una e.a., entonces $(B^A, *)$ será una e.a., donde si $f, g \in B^A$ definimos $f * g : A \rightarrow B$ por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

- **[Propiedades varias]:**

- Si $(B, *)$ es asociativa, entonces $(B^A, *)$ también.
- Si $(B, *)$ es conmutativa, entonces $(B^A, *)$ también.
- Si $(B, *)$ tiene neutro e , entonces $f \in (B^A, *)$ dado por $f(x) = e$ (función constante) es neutro de $(B^A, *)$.

- **[Estructura de pares ordenados]**: Sean $(A_1, *_1)$ y $(A_2, *_2)$ e.a., se define la l.c.i. $\otimes$ sobre $A_1 \times A_2$ por: Para $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$:

$$(a_1, a_2) \otimes (b_1, b_2) = (a_1 *_1 b_1, a_2 *_2 b_2)$$

- **[Propiedades varias]:**

- Si $(A_1, *_1), (A_2, *_2)$ son asociativas, entonces $(A_1 \times A_2, \otimes)$ también.
- Si $(A_1, *_1), (A_2, *_2)$ son conmutativas, entonces $(A_1 \times A_2, \otimes)$ también.
- Si $(A_1, *_1), (A_2, *_2)$ poseen neutros e_1 y e_2 , entonces $(A_1 \times A_2, \otimes)$ posee neutro (e_1, e_2) .
- Si a_1, a_2 poseen inversos b_1, b_2 en $(A_1, *_1), (A_2, *_2)$, entonces (a_1, a_2) posee inverso (b_1, b_2) en $(A_1 \times A_2, \otimes)$.

“Queda poquito para que acabe el semestre, ganitas a utds”

Pato