MA1101-6 Introducción al Álgebra 2023, Otoño
Profesora: Leonardo Sánchez
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 10: Al Infinito y más allá! Estructuras algebraicas

fecha:Pesquén esta materia que es importante pa C5 y Examen

Resumen

- **[Producto numerable de finitos]**: El producto de una familia numerable de conjuntos finitos de tamaño dos no es numerable.
- **[Cardinal del conjunto potencia]**: El cardinal del conjunto potencia de un conjunto es mayor que el cardinal del conjunto, es decir: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.
- **[Cardinal Real]**: Se tiene que $|\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq |[0,1]|$. Esto implica que: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |[0,1]| = |\mathbb{R}|$
- **[Ley de composición interna]**: Dado $A \neq \emptyset$. Se define una l.c.i. como:

$$\begin{array}{rccc} *: & A \times A & \to & A \\ & (x,y) & \to & x * y \end{array}$$

- **[Estructura algebrica]**: Si $*$ es l.c.i. en A, $(A,*)$ es llamado estructura algebraica. Si existe otra l.c.i Δ denotaremos $(A,*,\Delta)$
- **[Definiciones varias]**: Sea $(A,*)$ estructura algebrica:

    I) $*$ es **asociativa** si:

    $$\forall x,y,z \in A, (x*y)*z = x*(y*z)$$

    II) $e \in A$, se dira **neutro** para $*$ si:

    $$\forall x \in A, e*x = x*e = x$$

    III) Si e neutro, y $x \in A$, diremos que x tiene **inverso** si existe $y \in A$ tal que:

    $$x*y = y*x = e$$

    IV) $*$ es **conmutativa** si:

    $$\forall x,y \in A, x*y = y*x$$

    V) $a \in A$ es **absorbente** si:

    $$\forall x \in A, x*a = a*x = a$$

    VI) $a \in A$ es **idempotente** si

    $$a*a = a$$

    VII) $a \in A$ es **cancelable** si $\forall y,z \in A$:

    $$\begin{array}{c} a*y = a*z \Rightarrow y = z \\ y*a = z*a \Rightarrow y = z \end{array}$$

    VIII) Dado $(A,*,\Delta)$ diremos que Δ **distribuye** con respecto a $*$ si $\forall x,y,z \in A$:

    $$\begin{array}{c} x\Delta(y*z) = (x\Delta y)*(x\Delta z) \\ (y*z)\Delta x = (y\Delta x)*(z\Delta x) \end{array}$$

- **[Cancelavilidad]**: Sea $(A,*)$ e.a., se tiene que $a \in A$ es cancelable si y solo si las funciones $I_a(x) = a*x$ y $D_a(x) = x*a$ para $x \in A$ son inyectivas
- **[Unicidad del neutro]**: Una e.a. $(A,*)$ posee a lo más un neutro.
- **[Unicidad del inverso]**: Si la e.a. $(A,*)$ tiene neutro e y $*$ es asociativa, entonces los inversos (en el caso en que existan) son únicos.
- **[Propiedades varias]**: Si $(A,*)$ es e.a. asociativa con neutro e, entonces también cumple:

    I) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x^{-1} también. Más aún $(x^{-1})^{-1} = x$.

    II) Si $x,y \in A$ poseen inversos, entonces $x*y$ también y se tiene $(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$

    III) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x es cancelable.

P1. Sean A, B, C tres conjunto infinitos tales que:

$$A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset \text{ y } |B| = |C|.$$

(a) ¿Qué relación hay entre $|A \cup B|$ y $|A \cup C|$?

(b) ¿Y qué se puede decir si $|B| \leq |C|$?

(c) ¿Y si $A \cap B = \{x_0\}$?

En todos los casos, demuestra tus afirmaciones.

I Intuición:

II Teoría:

III Matraca:

P2. a) Determine la cardinalidad del conjunto $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x_1 + x_2 + x_3 = n\}$.

b) Demuestre que si X es infinito y $x \in X$ entonces $|X| = |X \setminus \{x\}|$.

I Intuición:

II Teoría:

III Matraca:

P3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene una función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f_0 = id_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y definimos

$$B = \{f_n(a) \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in A\}.$$

Demuestre que si A es un conjunto numerable entonces B también es numerable.

P4. Dado un conjunto no vacío A, sea $\mathcal{F} = \{f : A \to A \mid f \text{es biyectiva}\}$. Se define la operación * de la siguiente manera:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f * g = (f \circ g)^{-1}.$$

(a) Pruebe que * es una ley de composición interna.

(b) Estudie la sociatividad de *.

(c) Estudie la conmutatividad de *.

(d) Encuentre el elemento neutro de *.

(e) Estudie la existencia de elementos inversos en $\mathcal{F}$.

I Intuición:

II Teoría:

III Matraca:

P5. Sea $(S, *)$ una estructura algebraica con neutro e y $*$ asociativa. Para $a \in S$ fijo, invertible para $*$ y con inverso $a^{-1} \in S$ se define la operación $\triangle$ en S como sigue:

$$x, y \in S, \quad x \triangle y = x * a * y.$$

(a) Demuestre que la ley $\triangle$ es asociativa, tiene neutro y encuéntrelo.

(b) Caracterice los elementos invertibles para $\triangle$ y calcule el inverso de a para $\triangle$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

“«El grado de civilización de una sociedad se mide por el trato a sus presos» ”
Dostoyevski