fcfm Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Hola!! cómo estas?

Comenzamos cuando termine de terminar el link.

Maratón Cálculo y Álgebra C4

P1] Cardinalidad Conjunto finito

C4 2017 otoño (Álgebra)

P1)

Elemento Impar

1) Dem $2^{n-1} = \left|\{\underbrace{2i+1}_{\text{forma}} \mid \underbrace{i\in\mathbb{N},\ 0\le i < 2^{n-1}}_{\text{propiedad}},\ n\in\{1,\dots,m\}\}\right|$

n
1
2
3
⋮
m

números impares

$\boxed{i \in \mathbb{N}}$

$2i+1$

cuantos elementos tengo

$m=1, \quad 0 \leq i < 2^{1-1} = 2^0 = 1, \quad i \in \{0\} \to 1$

$m=2, \quad 0 \leq i < 2^{2-1} = 2, \quad i \in \{0,1\} \to 2$

$m=3, \quad 0 \leq i < 2^{3-1} = 4, \quad i \in \{0,1,2,3\} \to 4$

$m=4, \quad 0 \leq i < 2^{4-1} = 8, \quad i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \to 8$

$m=5, \quad 0 \leq i < 2^4 = 16, \quad i \in \{0,1,\ldots,15\} \to 16$

$\vdots$

$m=m, \quad 0 \leq i < 2^{m-1}, \quad i \in \{\underbrace{0,1,2,\ldots,2^{m-1}-1}_{\text{cuantos}}\} \to 2^{m-1}$

$2\cdot 0+1$

$m=1, \quad i \in \{0\}, \quad 2i+1 \in \boxed{\{1\}} = C_1$

$\cap$

$m=2, \quad i \in \{0,1\}, \quad 2i+1 \in \boxed{\{1,3\}} = C_2$

$2\cdot 0+1$

$2\cdot 1+1$

$\cap$

$m=3, \quad i \in \{0,1,2,3\}, \quad 2i+1 \in \boxed{\{1,3,5,7\}} = C_3$

$m=4, \quad i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}, \quad 2i+1 \in \boxed{\{1,3,5,7,9,11,13,15\}} = C_4$

$\vdots$

$m=m, \quad i \in \{0,1,\ldots,2^{m-1}-1\}, \quad 2i+1 \in \boxed{\{1,3,5,\ldots,2(2^{m-1}-1)+1\}} = C_m$

2^{m-1} opciones para i

$m = 1 \quad 2i+1 \rightarrow 1$ elemento.

$m = 2 \quad 2i+1 \rightarrow 2$

$m = 3 \quad 2i+1 \rightarrow 4$

$\vdots$

$m = m \quad 2i+1 \rightarrow 2^{m-1}$ elementos.

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq C_3 \subseteq \dots \subseteq C_{m-1} \subseteq C_m$$

Dado que están contenidos.

$$|C_m| = \left| \bigcup_{i=1}^{m} C_i \right| = |C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \dots C_m|$$

$$= 2^{m-1} \;//$$

$m = 1 \quad \{1\}_{\mathbb{N}}$

$m = 2 \quad \{1, 3\}_{\mathbb{N}}$

$m = 3 \quad \{1, 3, 5, 7\}_{\mathbb{N}}$

$m = 4 \quad \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}_{\mathbb{N}}$

$\vdots$

$m = m \quad \left|\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots\}^{\mathbb{N}}\right|$

$|$

$\{0, \underbrace{1, 2, \ldots\ldots, m}\}$

$\uparrow$

$1 \quad + \quad m$ elementos

$m+1$

P2| Supremo (teorico supremo)

Te hicimos limón frambesa

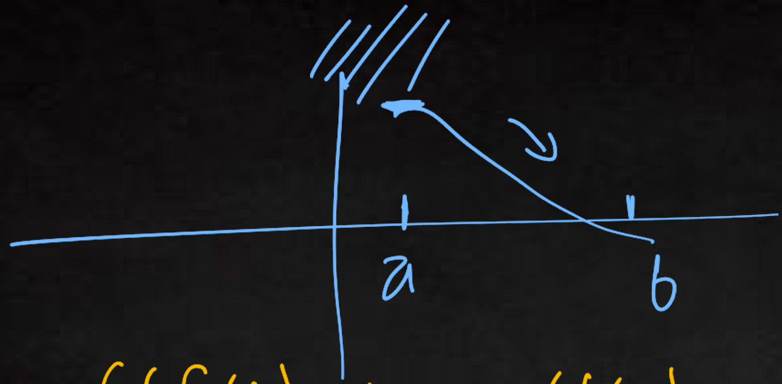
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ conjunto no vacío y acotado y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función decreciente

$f(A) = \{f(x) \,/\, x \in A\}$ tiene ínfimo supremo

forma, prop

PDQ $\boxed{f(\sup(A)) \leq \inf(f(A)) \leq \sup(f(A)) \leq f(\inf(A))}$

2 1 3



1) $\inf(f(A)) \leq \sup(f(A))$

2) $f(\sup(A)) \leq \inf(f(A))$

3) $\sup(f(A)) \leq f(\inf(A))$

1) Nos dicen que es no vacío y acotado $\wedge$ $A \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ Existe $\inf(A)$ y $\sup(A)$, por ax de supremo

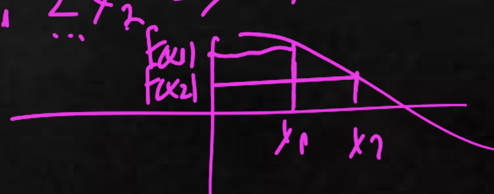
$$\forall x \in A$$

se cumple, como $x \in \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$

*) $\inf(A) \leq x \leq \sup(A)$ $/ f$

Antes de tomar f, ¿Qué sabemos de f?

f decreciente $\Leftrightarrow$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$



*) $\inf(A) \leq x \quad \wedge \quad x \leq \sup(A) \;/ f(\,)$

$f(x) \leq f(\inf(A)) \quad \wedge \quad f(\sup(A)) \leq f(x)$ Porque es decreciente

$$f(\sup(A)) \leq f(x) \leq f(\inf(A)), \; \forall x \in A$$

$$f(\sup(A)) \leq f(A) \leq f(\inf(A))$$

$f(A)$ esta acotado, y como $A \neq \phi$

$f(A) \neq \phi \Rightarrow$ Ax supremo

Existe $\sup(f(A))$ y $\inf(f(A))$

$$\forall y \in f(A), \; \inf(f(A)) \leq y \leq \sup(f(A))$$

$$\Rightarrow \inf(f(A)) \leq \sup(f(A)) \quad \square$$

1

tenemos que

$$\forall x\in A,\ f(\sup(A)) \le \underbrace{\overset{\overset{y}{\shortparallel}}{f(x)}}_{y} \le f(\inf(A))$$

$y \in f(A)$

$\sup(f(A))$

$$f(\sup(A)) \le \underset{f(A)}{f(x)} \le \underbrace{f(\inf(A))}_{\text{cota superior}}$$

$\forall x\in A$

$3 < y < \underset{\underset{\sup}{\shortparallel}}{s} < f$

$< f$

$\sup(f(A))$ es la menor de las cotas superiores

$\therefore\ \sup(f(A)) \le f(\inf(A))$ (2)

$\sup(B) \le$ cota superior (B)

2) $\forall x \in A$

cota inferior

$$\boxed{f(\sup(A)) \leq f(x)} \leq f(\inf(A))$$

lo tenía por parte anterior

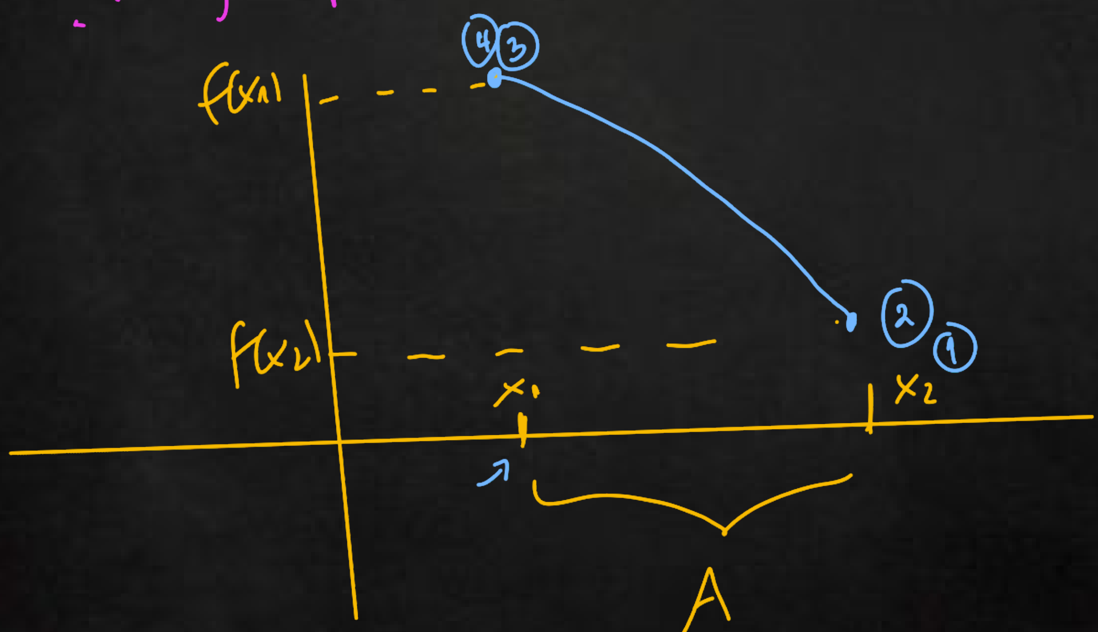
cota inferior $(B) \leq \inf(B)$

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$$

$$f(\sup(A)) \leq f(x),\ \forall x \in A$$

$$f(\sup(A)) \leq \inf(f(A)) \quad (3)$$

$$\therefore\ f(\sup(A)) \overset{1}{\leq} \inf f(A) \overset{2}{\leq} \sup(f(A)) \overset{3}{\leq} f(\inf(A)) \overset{4}{} \quad \boxtimes$$



$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \quad \Bigg| \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}$$

Entendamos sumas dobles

$i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$, $i, j \in \mathbb{N}$ a_{ij}

$j \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$\ldots$	$j=m-1$	$j=m$
$i=1$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$\ldots$	$a_{1\,m-1}$	a_{1m}
$i=2$	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	$\ldots$	$a_{2\,m-1}$	a_{2m}
$i=3$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	$\ldots$	$a_{3\,m-1}$	a_{3m}
$i=4$	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	$\ldots$	$a_{4\,m-1}$	a_{4m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$i=n$	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	a_{n4}	$\ldots$	$a_{n\,m-1}$	a_{nm}

todos los elementos a_{ij} de la suma doble

$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$j \in \{1, 2, \ldots, m\}$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

1) $$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

2) PDG

$n = m \qquad 1 \le i \le m = n$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \boxed{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=j}^{m} a_{ij}} \qquad n = m$$

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & j=1 & j=2 & j=3 & j=4 & & j=i & & j=m-1 & & j=m \\
\hline
i=1 & a_{11} & a_{12}\ 0 & a_{13}\ 0 & a_{14}\ 0 & \cdots & a_{1i}\ 0 & \cdots & a_{1\,m-1}\ 0 & & a_{1m}\ 0 \\
i=2 & a_{21} & a_{22} & a_{23}\ 0 & a_{24} & \cdots & a_{2i}\ 0 & \cdots & a_{2\,m-1}\ 0 & & a_{2m}\ 0 \\
i=3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\ 0 & \cdots & a_{3i}\ 0 & \cdots & a_{3\,m-1}\ 0 & & a_{3m}\ 0 \\
i=4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4i}\ 0 & \cdots & a_{4\,m-1}\ 0 & & a_{4m}\ 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \\
i=m & a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{m\,m-1} & & a_{mm}
\end{array}$$

0

$n = m$

PDQ

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}, \qquad \forall\, i<j \quad a_{ij}=0$$

$$1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le n$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij} + \underbrace{\overset{+0}{\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}}}_{\text{será } 0}\right)$$

$a_{ij}=0$

$\forall\, i<j$,

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)} =$$

Aditividad

$$\{\boxed{1, 2, \ldots\ldots i-1, i}, \boxed{i+1, \ldots n}\}$$

$i \geq j \quad a_{ij}$

$i < j \quad a_{ij} = 0$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}}_{0} + \sum_{i=j}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{ij} \quad //$$

$i < j$

$i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Cálculo

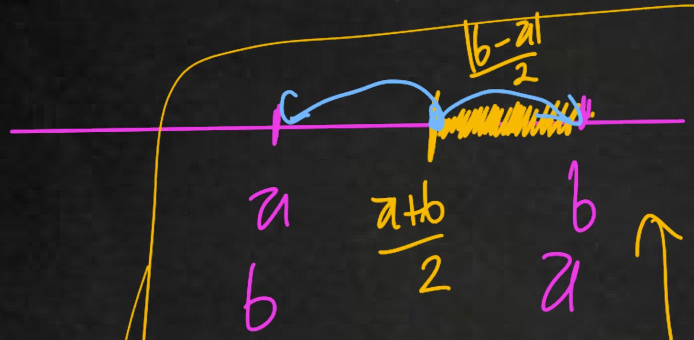
Encontrar fórmula para el $\max\{a,b\}$

$|b-a| = |a-b|$

$\max\{1,2\} = 2$

$\max\{5,4\} = 5$

$\max\{-2,-3\} = -2$



$\max\{a,b\}$

soy la bota

$$\boxed{\frac{a+b}{2} + \frac{|b-a|}{2} = \max\{a,b\}} \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

$$\max\{-2,5\} = \frac{-2+5}{2} + \frac{|5--2|}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\max\{-3,-2\} = \frac{-3-2}{2} + \frac{|-2--3|}{2} = -2$$

$$-\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

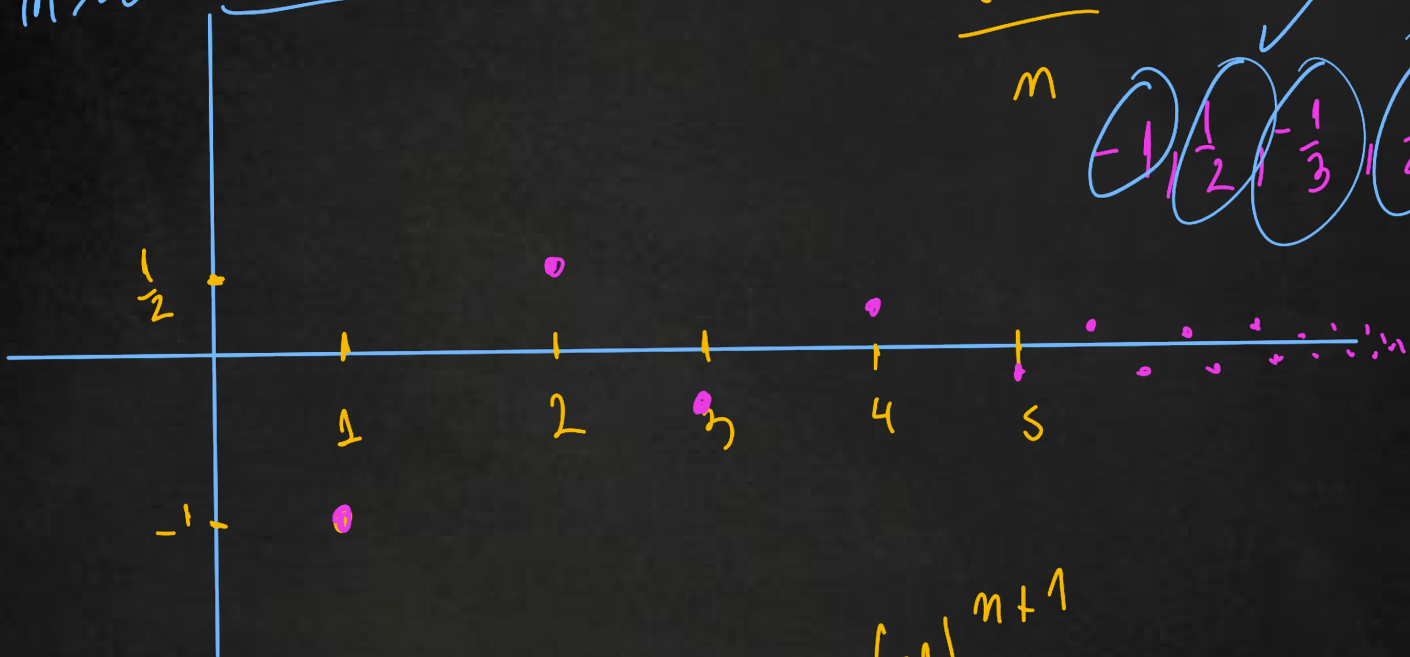
$$\min\{a,b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|b-a|}{2}$$

Calcula

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\max\left\{\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}} = 0 \qquad n \neq 0$$

$$\frac{(-1)^n}{n}$$

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5} \ldots$$



$$\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$$

$\frac{1}{n} \to 0$ solo intuición

$\therefore$ hay que probarlo formalmente

$$\lim_{n\to\infty} \max\left\{ \overbrace{\frac{(-1)^n}{n}}^{a}, \overbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}^{b} \right\}$$

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|b-a|}{2}$$

$$= \underbrace{\frac{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n\cdot(-1)}{n}}{2}}_{\frac{a+b}{2}} + \underbrace{\frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n}\right|}{2}}_{\frac{|b-a|}{2}}$$

$$= \cancelto{0}{\frac{\frac{(-1)^n}{n}\left[1+(-1)\right]}{2}} + \frac{\left|\frac{(-1)^n}{n}\left[(-1)-1\right]\right|}{2}$$

$$= \frac{1^n}{n} \cdot \frac{\cancel{|-2|}}{\cancel{2}} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

pues es nula

luego $\lim\limits_{n \to +\infty} \max \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\} = 0$

10 minutos
de recreo

23:30

Binomio de Newton

Sea $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

Álgebra.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\overset{4^0}{1}+\overset{4^1}{4}+4^2+\dots+4^{k-1}\right)\binom{n}{k}=\frac{5^n-2^n}{3}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} 4^i$$

Combinatoria = Binomio

$$=\sum_{k=1}^{n}\boxed{\sum_{i=0}^{k-1}4^i}\binom{n}{k}$$

constante para i

Geométrica

$$\# \sum_{k=0}^{n} a^k = \boxed{\frac{a^{n+1}-1}{a-1}} \qquad \frac{1-a^{n+1}}{1-a}=\frac{\cancel{-}(a^{n+1}-1)}{\cancel{-}(a-1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k-1}4^i=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{4^{k-1+1}-1}{4-1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(4^k-1\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}4^k-\binom{n}{k}\right)\right]$$

linealidad

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k+1-1-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k+4^0\binom{n}{0}$$

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{n!\,0!}=1$$

$$= \frac{1}{3}\left[\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k} - \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \underbrace{1}_{\binom{n}{0}} \right) \right]$$

$$1 = \underbrace{4^0}_{1} \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} = 1$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k \cdot \underbrace{1^{n-k}}_{1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{1^k \cdot 1^{n-k}}_{1} \right]$$

$1^n = 1$

$1^{n-k} = 1$

$$= \frac{1}{3}\left[(4+1)^n - (1+1)^n \right]$$

fórmula binomio Newton.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!}$$

$$\frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\,0!} = \frac{1}{0!}$$

$$= 1$$

$$= \frac{5^n - 2^n}{3}$$

10. Semana 9

P1

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(1+4+4^2+...+4^{k-1})\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}4^i\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4^k-1}{4-1}\right)\binom{n}{k} \qquad \backslash\text{geométrica} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(4^k\binom{n}{k}-\binom{n}{k}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}4^k\binom{n}{k}-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k+1-1-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right] \qquad \backslash\text{sumar } 0 \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k+1\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right] \qquad \backslash\text{agregar primer término} \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k\cdot 1^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot 1^{n-k}\right] \qquad \backslash 1^{n-k}=1 \\
&= \frac{1}{3}\left[(4+1)^n-(1+1)^n\right] \qquad \backslash\text{binomio} \\
&= \frac{5^n-2^n}{3}
\end{aligned}
$$

P2

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\frac{8^{k+1}}{3^i} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{8}{3^i}\left(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}8^k\right) && \backslash\text{salida de constantes}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{8}{3^i}\left(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}8^k\cdot 1^{i-k}\right) && \backslash 1^{i-k}=1\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{8}{3^i}(8+1)^i && \backslash\text{binomio}\\
&= 8\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}3^i\right)\\
&= 8\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{3^{j+1}-3}{3-1}\right) && \backslash\text{geométrica}\\
&= 4\left[\sum_{j=1}^{n}3^{j+1}-\sum_{j=1}^{n}3\right]\\
&= 12\left[\sum_{j=1}^{n}3^{j}-\sum_{j=1}^{n}1\right]\\
&= 12\left[\frac{3^{n+1}-3}{3-1}-n\right] && \backslash\text{geométrica}\\
&= 6(3^{n+1}-3)-12n
\end{aligned}$$

P3

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(1-x)^k &= \frac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} && \backslash\text{geométrica}\\
&= \frac{1-\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^k\cdot 1^{n+1-k}}{x} && \backslash\text{binomio}\\
&= \frac{1-\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^k}{x} && \backslash 1^{n+1-k}=1\\
&= \frac{1-(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^k+\binom{n+1}{0}(-x)^0)}{x} && \backslash\text{soltar primer término}\\
&= \frac{1-(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^k+1)}{x}\\
&= \frac{-\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^k}{x}\\
&= \frac{-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-x)^{k+1}}{x} && \backslash\text{cambio de índice}\\
&= \frac{-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-x)^k(-x)}{x}\\
&= \frac{x\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-x)^k}{x}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(-x)^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(x)^k(-1)^k
\end{aligned}$$

P4

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k7^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k7^k \binom{n}{k} \qquad \backslash\text{soltar primer término} =0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k7^k n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{7^k n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{7^{k+1} n!}{k!(n-(k+1))!} \qquad \backslash\text{cambio de índice} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{7^{k+1} n!}{k!((n-1)-k)!} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{7^{k+1} (n-1)!}{k!((n-1)-k)!} \qquad \backslash\text{definición factorial } n! = n(n-1)! \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 7^{k+1} \\
&= 7n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 7^{k} \cdot 1^{n-1-k} \qquad \backslash 1^{n-1-k} = 1 \\
&= 7n(7+1)^{n-1} \qquad \backslash\text{binomio} \\
&= 7n8^{n-1}
\end{aligned}$$

P5 (a)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i}\binom{i}{k} &= \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{i!}{k!(i-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-i)!(i-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-i)!(i-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(n-i)!(i-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{((n-k)-(i-k))!(i-k)!} \\
&= \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} &= \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} && \text{\usando parte anterior}\\
&= \binom{n}{k}\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{i-k} && \text{\constantes salen}\\
&= \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i} && \text{\cambio de índice}\\
&= \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}1^{n-k-i}1^{i} && \backslash 1^{n-k-i}=1\\
&= \binom{n}{k}(1+1)^{n-k} && \text{\binomio}\\
&= \binom{n}{k}2^{n-k}
\end{aligned}$$

P6 **(a)** Vamos a dividir o "particionar" C en una colección infinita (numerable) de conjuntos, luego probaremos que cada uno de ellos es numerable, primero fijamos n y con esto tenemos los siguientes subconjuntos.

$$C = \begin{cases} C_1 = & \{x \in [0,+\infty), x \in \mathbb{N}\} = \{1,2,3,4...\} \\ C_2 = & \{x \in [0,+\infty), x^2 \in \mathbb{N}\} = \left\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4}...\right\} \\ \vdots & \\ C_n = & \{x \in [0,+\infty), x^n \in \mathbb{N}\} = \left\{1,\sqrt[n]{2},\sqrt[n]{3},\sqrt[n]{4}...\right\} \end{cases}$$

Para cada C_n podemos establecer la siguiente función $f_n : C_n \to \mathbb{N}$ $f(x) = x^n$, por ejemplo, para C_2 : $f\left(\sqrt{2}\right) = (\sqrt{2})^2 = 2, f\left(\sqrt{3}\right) = (\sqrt{3})^2 = 3, f\left(\sqrt{4}\right) = (\sqrt{4})^2 = 4$. Cada una de estas funciones f_n son claramente biyectivas, con esto $|C_1| = |C_2| = ... = |C_n| = |\mathbb{N}|$ es numerable. Luego $C = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$ es numerable por ser la unión numerable de conjuntos numerables.

(b) Vamos a dividir o "particionar" A en una colección infinita (numerable) de conjuntos, luego probaremos que cada uno de ellos es numerable, primero fijamos i y con esto tenemos los siguientes subconjuntos.

$$A = \begin{cases} A_1 = & \left\{x \in \mathbb{R}/\exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k}{3}\right\} = \left\{..., \frac{-2}{3}\frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, ...\right\} \\ A_2 = & \left\{x \in \mathbb{R}/\exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k}{3^2}\right\} = \left\{..., \frac{-2}{9}\frac{-1}{9}, 0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, ...\right\} \\ \vdots & \\ A_n = & \left\{x \in \mathbb{R}/\exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k}{3^n}\right\} = \left\{..., \frac{-2}{3^n}\frac{-1}{3^n}, 0, \frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}, ...\right\} \end{cases}$$

Para cada A_n podemos establecer la siguiente función $f_n : A_n \to \mathbb{Z}$ $f(x) = k$, por ejemplo, para A_1 : $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1, f\left(\frac{2}{3}\right) = 2, f\left(\frac{-1}{3}\right) = -1$. Cada una de estas funciones f_n son claramente biyectivas, con esto $|A_1| = |A_2| = ... = |A_n| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ es numerable.

Luego $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ es numerable por ser la unión numerable de conjuntos numerables.

(c) Si una recta no vertical pasa por (0,1) y corta al eje OX en coordenada racional $(q, 0)$, entonces es de la forma $l : y = \frac{-x}{q} + 1$, con $q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Si llamamos L al conjunto de todas estas rectas, entonces se puede describir de la siguiente manera $L : \left\{y = \frac{-x}{q} + 1/q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\right\}$. Podemos entonces establecer la siguiente función $f : L \to \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ $f(l_1) = q$, es decir, que a cada recta le asocio la coordenada x del punto que corta al eje OX (vendría siendo q). Es inyectiva ya que las rectas en este conjunto se diferencian justamente por el punto de corte en el eje OX (si dos rectas tienen distinto q, son distintas entre si), además es sobreyectiva ya que para cada $q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ basta tomar la recta que corte en el eje OX en el punto $(q, 0)$. Como es biyectiva se concluye que $|L| = |\mathbb{Q}\backslash\{0\}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ y, por lo tanto, es numerable.

(d) Las recta no vertical que no pasa por el origen y corta los ejes en coordenadas racionales es de la forma $y = \frac{-p}{q}(x - q)$ con $p, q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Si llamamos L al conjunto de todas estas rectas, entonces se puede describir de la siguiente manera L : $\left\{y = \frac{-p}{q}(x - q)/p, q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\right\}$. Luego podemos hacer la siguiente división del conjunto L, fijando p

$$L = \begin{cases} L_1 = & \left\{y = \frac{-1}{q}(x - q)/q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\right\} \\ L_2 = & \left\{y = \frac{-2}{q}(x - q)/q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\right\} \\ \vdots & \\ L_p = & \left\{y = \frac{-p}{q}(x - q)/q \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}\right\} \end{cases}$$

Por la parte (a) se sabe que $L_1, L_2, ..., L_n$ son numerables, luego $L = L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n$ es numerable por ser la unión numerable de conjuntos numerables.

(e) Vamos a dividir o "particionar" A en una colección infinita (numerable) de conjuntos, primero fijamos i y con esto tenemos los siguientes subconjuntos.

$$A = \begin{cases} A_1 = & \left\{\frac{p}{2} \ | \ p \in \mathbb{N} \wedge p < 2\right\} = \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ A_2 = & \left\{\frac{p}{2^2} \ | \ p \in \mathbb{N} \wedge p < 2^2\right\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right\} \\ \vdots & \\ A_n = & \left\{\frac{p}{2^n} \ | \ p \in \mathbb{N} \wedge p < 2^n\right\} = \left\{\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, ...\right\} \end{cases}$$

Notar que cada uno de estos conjuntos es finito y no vacío, luego utilizando la indicación A es numerable por ser unión numerable de conjuntos finitos no vacíos.

(f) Primero notemos que E contiene todas las tuplas con una cantidad par de componentes, dichas cantidades pueden ser solamente 1 o -1, y su suma da 0, es decir, el conjunto es de la forma:

$$E = \{(1, -1), (-1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 1, -1, -1), ...\}$$

Para demostrar que es infinito basta ver que para cada natural tomamos una tupla, en efecto

$$E = \begin{cases} n=1 & \text{tomamos } a=(-1,1), a\in\{-1,1\}^2 \\ n=2 & \text{tomamos } a=(-1,1,1,-1), a\in\{-1,1\}^4 \\ \vdots & \\ n=n & \text{tomamos } a=(-1,1,...,-1,1), a\in\{-1,1\}^{2n} \end{cases}$$

Luego para cada natural existe un elemento en E, se concluye que es infinito. El conjunto E se puede ver como la unión de los siguientes conjuntos.

$$E = \begin{cases} E_1 = \{a=(a_1,a_2), a\in\{-1,1\}^2, \sum_{k=1}^{2} a_k = 0\} \\ E_2 = \{a=(a_1,a_2,a_3,a_4), a\in\{-1,1\}^4, \sum_{k=1}^{4} a_k = 0\} \\ \vdots \\ E_n = \{a=(a_1,...,a_n), a\in\{-1,1\}^{2n}, \sum_{k=1}^{n} a_k = 0\} \end{cases}$$

Notemos que cada E_n es finito, por ejemplo $E_1 = \{(-1,1),(1,-1)\}$, $|E_1| = 2$, por lo tanto E es una unión de finitos ($|E| \leq |\mathbb{N}|$). De lo visto anteriormente se tiene que $|\mathbb{N}| \leq |E|$, con lo que juntando ambas expresiones se deduce que E es numerable. Otra forma de ver esto es haciendo la siguiente biyección que asocia un natural con cada tupla de E.

$$\begin{aligned} 1 &\to (-1,1) \\ 2 &\to (1,-1) \\ 3 &\to (1,-1,1,-1) \\ 4 &\to (1,-1,-1,1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

(g) Notemos que como $x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, necesariamente $x_1 \in \mathbb{Z}$, esto porque la suma de los tres debe dar un número natural, entonces E puede ser descrito como el siguiente conjunto $E = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^2 / \exists n \in \mathbb{N}, x_1+x_2+x_3 = n\}$, se deduce que $E \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^2 \Rightarrow |E| \leq |\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$, además si fijamos x_1, x_2, digamos en 0, existirá una tupla $(0,0,n)$ para cada natural n, con lo cual podemos deducir que el conjunto es infinito ($|\mathbb{N}| \leq |E|$), juntando ambas desigualdades se tiene que $|E| = |\mathbb{N}|$.