MA1101-6 Introducción al Álgebra 2023, Otoño
Profesora: Leonardo Sánchez.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 09: Coeficientes Binomiales, cardinalidad Finita e Infinita

P1. a) Demuestre sin usar inducción que

$$\frac{1\binom{n}{1}}{\binom{n}{0}} + \frac{2\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} + \ldots + \frac{n\binom{n}{n}}{\binom{n}{n-1}} = \binom{n+1}{2}.$$

Hint: *Escriba la expresión de la izquierda como una sumatoria y calcúlela usando propiedades de* $\binom{n}{k}$.

b) Calcule

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}.$$

P2. Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ Demuestre que

a) $|\{2i+1 : i \in \mathbb{N}, n \in \{1,...,m\}, 0 \leq i < 2^{n-1}\}| = 2^{m-1}$.

b) $\left|\left\{\frac{2i+1}{2^n} : i \in \mathbb{N}, n \in \{1,...,m\}, 0 \leq i < 2^{n-1}\right\}\right| = 2^m - 1$.

P3. a) Sean $A_1, ..., A_n$ conjuntos finitos. Demuestre que $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$ si y sólo si para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

b) Sea $\mathcal{C}$ una partición de un conjunto finito A de modo que para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $|X| = |Y|$. Demuestre que $|\mathcal{C}|$ divide a $|A|$.

P4. Demuestre que el siguiente conjunto es numerable:

$$C = \{x \in [0, \infty) \ |\exists n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, x^n \in \mathbb{N}\}.$$

Propuestos

P5. ***Si nos da el tiempo***
Pruebe sin usar inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$$

P6. ***¿A o B?***
Sean A y B conjuntos tales que $A \cup B$ es numerable. Demuestre que A es numerable o B es numerable

P7. ***Biyecciones otra vez***
Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ numerables. Demuestre que el conjunto $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ es numerable.

P8. Demuestre que para A, B y C conjuntos finitos

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

A partir de este resultado determine el cardinal del conjunto de todos los números menores que $100 * 7 * 13 * 19$ y que sean divisibles por 7 o 13 o 19.

Selección especial Preparación C2

P9. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)a_i$$

Sumas Dobles

P10. Si I es un conjunto finito, pruebe que el conjunto de sus partes ($\mathcal{P}(I)$) tiene cardinal finito dado por $|\mathcal{P}(I)| = 2^{|I|}$.
Biyecciones

P11. Demuestre, sin usar inducción, que

$$\sum_{i=5}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{i+1}{j(j+1)} = \frac{(n-4)(n+5)}{2}$$

P12. Se define en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia. Calcule El conjunto cuociente $(\mathbb{R} \setminus \{0\})/\mathcal{R}$

Resumen

- **[Cantidad de inyecciones]**: Sean A, B conjuntos tales que $|A| = k$ y $|B| = n$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!} &= |\{f : A \longrightarrow B | f \text{ es inyectiva }\}| \\ &= \# \text{ de k- tuplas } B^k \text{ sin repeticiones.} \end{aligned}$$

- **[Coeficiente Binominal]**: Para dos enteros n y k, $n \geq 0$, se define

$$\binom{n}{k}$$

Este numero representa el numero de subconjuntos de tamaño k que posee un conjunto de tamaño n. Se verifica que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **[Propiedades relevantes]**:
  a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
  b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

- **[Binomio de Newton]**: Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- **[Cardinal de la imagen de un conjunto]**: Si $f : A \longrightarrow B$ función, entonces$|f(A)| \leq |A|$

- **[Conjunto numerable]**: Un conjunto A se dira numerable si $|A| = |\mathbb{N}|$. En particular tenemos que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables.

- **[Propiedades Cardinal infinito]**: Sea A conjunto infinito, entonces:
  i) Si A infinito y B finito, entonces $|A| = |A \cup B| = |A \setminus B|$
  ii) $\forall k \in \mathbb{N}$, existe un conjunto B_k tal que $B_k \subseteq A$ y $|B_k| = k$.
  iii) $|A| \geq |\mathbb{N}|$ es decir el cardinal de los naturales es **el menor cardinal infinito**.

Obs.: Si $|A| \leq |\mathbb{N}|$ entonces A es numerable.

- **[Álgebra de numerables]**:
  i) La unión numerable o finita de conjuntos numerables o finitos $(A_i)_{i \in I}$ (con $I \subseteq \mathbb{N}$) es a lo más numerable, es decir:

$$A := \bigcup_{i \in I} A_i$$

  Cumple que $|A| \leq |\mathbb{N}|$

  ii) La unión finita de conjuntos numerables $(A_i)_{i=1}^n$ es numerable, es decir:

$$A := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

  Es numerable.

  iii) La unión numerable de conjuntos numerables $(A_i)_i^n$ es numerable, es decir:

$$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

  Es numerable.

  iv) El producto cartesiano finito de conjuntos numerables $(A_i)_{i=1}^n$ es numerable, es decir:

$$A := \prod_{i=1}^{n} A_i$$

  Es numerable.

"No tengo frase, pero que les vaya bacan!"
Pato

P1) Sin inducción

a)
$$1\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{0}} + 2\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} + \_\_\_ + n\frac{\binom{n}{n}}{\binom{n}{n-1}} = \binom{n+1}{2}$$

1

Pasamos a sumatoria

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{\cancel{k}\cdot \cancel{n!}}{(n-k)!\,\cancel{k!}}}{\frac{\cancel{n!}}{(n-k+1)!\,\cancel{(k-1)!}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k+1)!}{(n-k)!}$$

$(k-1)!\,k = k!$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{\cancel{(n-k)!}} = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) \overset{\text{linealidad}}{=} \sum_{k=1}^{n} (n+1) - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\text{suma gauss}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (n+1) - \frac{n(n+1)}{2} \overset{\text{suma constante}}{=} (n+1)\underbrace{(n-1+1)}_{0} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n-1)!}{2!\,(n-1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-2)!\cdot 2!}$$

$$= \binom{n+1}{2}$$

b) Calcule

(2)

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} \binom{m}{k}.$$

multiplicamos por um 1 conveniente para poder juntar com el coeficiente binomial.

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} \binom{m}{k} \underbrace{\frac{(m+1)(m+2)}{(m+1)(m+2)}}_{1}$$

ordeno

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \cdot \overbrace{\frac{m!}{(m-k)!\,k!}}^{k!\ 1} \cdot \underbrace{\frac{(m+1)(m+2)}{(k+1)(k+2)}}_{(k+2)!} \cdot \underbrace{\frac{1}{(m+1)(m+2)}}_{\text{no depende de } k \text{ sale por linealidad.}}$$

agrupo factoriales

$$= \frac{1}{(m+1)(m+2)} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (m+2)!}{(m-k)!\,(k+2)!}$$

coeficiente binomial
go $(m+2-(k+2)) = (m-k)$ //

$$= \frac{1}{(m+1)(m+2)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m+2}{k+2}$$

cambio indice
$(-1)^{k+2} = (-1)^k(-1)(-1) = (-1)^k$

$$= \frac{1}{(m+1)(m+2)} \sum_{k=2}^{m+2} (-1)^{k-2} \binom{m+2}{k}$$

ni quita ni pone
sumo $k=1$
y $k=0$

$$= \frac{1}{(m+1)(m+2)} \left[\sum_{k=0}^{m+2} (-1)^k \binom{m+2}{k} - (-1)^1 \binom{m+2}{1} - (-1)^0 \binom{m+2}{0} \right]$$

$\cdot 1^{m+2-k} = 1$

no cambio nada solo escribo forma

$$= \frac{1}{(m+1)(m+2)} \left[\sum_{k=0}^{m+2} (1)^{m+2-k} (1)^k \binom{m+2}{k} + \frac{(m+2)!}{(m-1)!\,1!} - \frac{(m+2)!}{(m+2)!\,0!} \right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[(1-1)^{n+2} + n+2 - 1\right]$$

$\downarrow$ $0^{\ell} = 0 \; ; \; \ell \neq 0$

5

$$= \frac{1}{n+2} \; //$$

P2 | 1 |

$m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ Dem

a) $|\{2i+1 : i \in \mathbb{N}, m \in \{1, \ldots, m\}, 0 \leq i \leq 2^{m-1}\}| = 2^{m-1}$

Veamos que si fijamos m podemos definir un conjunto $A_m = \{2i+1 : i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq 2^{m-1}\}$

luego $A = \{2i+1 : i \in \mathbb{N}, m \in \{1, \ldots, m\}, 0 \leq i \leq 2^{m-1}\}$

donde vemos que si recorremos todo $\{1, \ldots, m\}$ ocurre $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, como nos pide calcular la cardinalidad la idea será calcular la de algún conjunto más fácil o abordable

Veamos como se comporta $m = 1$

$i = 0$ es $2 \cdot 0 + 1 = 1 \in \mathbb{N}$, $0 \leq 0 \leq 2^{1-1} = 1$ ✓

$i = 1$ es $2 \cdot 1 + 1 = 3 \in \mathbb{N}$, $0 \leq 1 \leq 1$ ✓ $1, 3 \in A_1$

$i = 2$ es $2 \cdot 2 + 1 = 5 \in \mathbb{N}$, $0 \leq 2 \leq 1$ X

$i = 3$ es $2 \cdot 3 + 1 = 7 \in \mathbb{N}$, $0 \leq 3 \leq 1$ X

luego $m = 2$

$i = 0$ es $2 \cdot 0 + 1 = 1$, $0 \leq 0 \leq 2$ ✓

$i = 1$ es $2 \cdot 1 + 1 = 3$, $0 \leq 1 \leq 2$ ✓ $\Rightarrow 1, 3, 5 \in A_2$

$i = 2$ es $2 \cdot 2 + 1 = 5$, $0 \leq 2 \leq 2$ ✓

$i = 3$ es $2 \cdot 3 + 1 = 7$, $0 \leq 3 \leq 2$ X

⋮

$n = 20$

$i=0$ es $2\cdot 0+1=1$, $0\leq 0 \leq 2^{19}$ ✓

$i=1$ es $2\cdot 1+1=3$, $0\leq 1 \leq 2^{19}$ ✓

⋮ ✓ | $\Rightarrow 1, 3, 5, \ldots 2^{20+1} \in A_{20}$

$i=2^{19}$ es $2\cdot 2^{19}+1 = 2^{20}+1$, $0\leq 2^{19} \leq 2^{19}$ ✓

✗

Podemos ver que si n es mayor los A_n son mayores, por cuál es el tope? m pues $n \in \{1, \ldots m\}$

luego $n=m$ es $i\in\mathbb{N}$, $2\cdot m+1$ | $0\leq i \leq 2^{m-1}$

luego están contenidos los impares en los anteriores, luego observamos $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots A_m$ por lo que probaremos

pdq: $\forall n \in \{1, \ldots m\}$ $A_n \subseteq A_m$

sea $x\in A_n$, esto es $\exists i \in \{0, \ldots \underbrace{2^{n-1}-1}_{\text{existe antecesor en } \mathbb{N}}\}$; (por la condición $0\leq i\leq 2^{n-1}$)

tq $x = 2i+1$

Pero si $i\in\{0, 1, \ldots 2^{n-1}-1\}$

$\Rightarrow i \in \{0, 1, \ldots 2^{m-1}-1, 2^{m-1}\}$ pues $m \geq n$

$\Rightarrow x \in A_m$

luego $A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k = A_m$ luego su cardinalidad $|A| = |\{2i+1, i\in\{0, \ldots 2^{m-1}-1\}\}|$
$= 2^{m-1}$ //

b) Definamos un conjunto y trabajemos de manera similar

Sea el conjunto $B = \{ \frac{2i+1}{2^n} ; i \in \mathbb{N}, n \in \{1, \ldots m\}, 0 \leq i < 2^{n-1} \}$

$B_n = \{ \frac{2i+1}{2^n} ; i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < 2^{n-1} \} ; n \in \{1, \ldots m\}$

y notemos [redacted] $B = \bigcup_{n=1}^{m} B_n$ veremos que son conjuntos disjuntos

Esto para poder calcular la cardinalidad de la unión como la suma de cada conjunto

- Sea $B_i, B_j \in \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $i, j \in \mathbb{N}$ tq $i \neq j$ queremos probar que $B_i \cap B_j = \phi$ por contradicción, sea $x \in B_i \cap B_j$ $\Rightarrow x \in B_i \wedge x \in B_j$ luego spg $n_i < n_j$ (en caso de ser contrario es variable mutal)

$x \in B_i \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}, x = \frac{2i+1}{2^{n_i}}, i \in \{0, \ldots 2^{n_i - 1}\}$

$x \in B_j \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}, x = \frac{2j+1}{2^{n_j}}, j \in \{0, \ldots 2^{n_j - 1}\}$

luego $x = \frac{2i+1}{2^{n_i}} = \frac{2j+1}{2^{n_j}} \Leftrightarrow 2^{n_j - n_i}(2i+1) = 2j+1$

Pues potencias de 2 que no es 0 exponente por Impar = Par $\neq$ Impar $= 2j+1$

$\therefore B_i \cap B_j = \phi, \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$

luego $|B| = |\bigcup_{k=1}^{m} B_k| = \sum_{k=1}^{m} |B_k| = \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} \overset{\text{cambio}}{=} \sum_{k=0}^{m-1} 2^k = \frac{2^{m} - 1}{2-1} = 2^m - 1$ //

P3|

a) Sean $A_1, \dots, A_m$ conjuntos finitos. Dem $\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| \iff$ $\forall i,j \in \{1,\dots,m\}, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$

$\Rightarrow$) Veamos que tenemos $\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| \le \sum_{i=1}^{m} |A_i|$ por inducción si $A_1, \dots, A_m$ finitos luego $m=1$ $|A_1| = |A_2|$; $m=2$ $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - \underset{\downarrow 0}{|A_1 \cap A_2|}$ por hipótesis

$\le |A_1| + |A_2| = \sum_{i=1}^{2} |A_i|$

inductiva ahora veamos, sea algun $m \in \mathbb{N}$ tq $\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| \le \sum_{i=1}^{m} |A_i|$ luego pdq $P(m+1) \iff \left|\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right| \le \sum_{i=1}^{m+1} |A_i|$; pero $\left|\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i \cup A_{m+1}\right|$

$$\Rightarrow \left|\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| + |A_{m+1}| - \underset{\downarrow 0}{\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i \cap A_{m+1}\right|}$$

$$\le \left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| + |A_{m+1}| \le \sum_{i=1}^{m} |A_i| + |A_{m+1}| = \sum_{i=1}^{m+1} |A_i| \;// \;\blacksquare$$

luego usemos $\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| \le \sum_{i=1}^{m} |A_i|$ para probar lo pedido, $\forall A_1, \dots, A_m$ finito

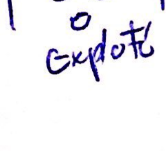
Por contradicción entonces $A_i \cap A_j \neq \emptyset \iff \exists x \in A_i \cap A_j$, $i \neq j$

luego $\left|\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right| = \left|\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{m} A_k \cup A_i \cup A_j\right| \le \left|\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{m} A_k\right| \cup |A_i \cup A_j|$

$$\le \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{m} |A_k| + |A_i| + |A_j| - |A_i \cap A_j|$$

pero $\exists x \in A_i \cap A_j$, por lo que $|A_i \cap A_j| > 0$ luego

$$\left|\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right| < \sum_{k=1}^{m} |A_k|$$



Pues mi hipótesis es $\left|\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right| = \sum_{k=1}^{m} |A_k|$ //

a) $\leq$) La probaremos por inducción. Sabemos $A_i \cap A_j = \phi$ si $j \neq i$
y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es familia finita luego $n = 1$ $|A_i| = |A_i|$ ✓
$n = 2$ $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - \underbrace{|A_1 \cap A_2|}_{} = \sum_{i=1}^{2} |A_i|$ // luego hipótesis
inductiva para algún $n \in \mathbb{N}$ $p(n)^{\circ}$ i.e $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

Veamos $p(n+1)$, es decir, $|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i| = |\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}| = |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| + |A_{n+1}|$

$- \underbrace{|\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}|}_{0 \text{ por hipótesis}} \overset{\text{hipótesis inducción}}{=} \sum_{i=1}^{n} |A_i| + |A_{n+1}| + 0 = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i|$ ☒

pues $\{1, \ldots, n\} \not\ni n+1$

$\therefore$ se tiene lo pedido //.

b) Sea C partición de conj finito A, $\forall X, Y \in C$, $\underbrace{|X| = |Y|}_{|X| = l > 0}$ PDQ.
$|C|$ divide a $|A|$

Tenemos que por ser partición recubre el conjunto y es disjunta
a pares por lo que $\bigcup_{K \in C} X_K = A$ luego $|\bigcup_{K \in C} X_K| = |A|$

Como son disjuntos $\sum_{K \in C} |X_K| = |A| \Rightarrow \sum_{K \in C} l = |A|$

$= l \cdot |C| = |A| \iff |C| \mid |A|$

$|C|$ divide a $|A|$
por contadura de
enteros //

Ya terminamos!

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl