**MA1101-6 Introducción al Álgebra 2023, Otoño**
**Profesor:** Leonardo Sánchez.
**Auxiliar:** Patricio Yáñez Alarcón
**Correo**: pyanez@dim.uchile.cl

# Auxiliar 08: Sumatorias

15 de Mayo

**P1.** Calcule:

(a).- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\Big(k+\frac{2^j}{j}\Big).$

(b).- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$

(c).- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k!.$

*a)* Intuición:

*b)* Teoría:

*c)* Matraca:

**P2.** Calcule:

(a).- $\displaystyle\sum_{k=1+\sum_{i=1}^{n-1} i}^{\sum_{j=1}^{n} j}(2k-1)$

(b).- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{k(k+1)3^k}$

(c).- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+5k+5}{(k+4)!}$

*a)* Intuición:

*b)* Teoría:

*c)* Matraca:

**P3.** ***Sumatorias varias***
Calcule las siguientes sumatorias:

*a)* $\displaystyle\sum_{j=3}^{n-1}(j+1)(j+2)$

*b)* $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}b_k-b_{k-3}$

*c)* $\displaystyle\sum_{k=l}^{n}\left(\frac{2}{l}\right)^k$

*d)* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}2^{i+1}\frac{i}{(i+1)(i+2)}$

*e)* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i2^i$

*a)* Intuición:

*b*) Teoría:

*c*) Matraca:

**P4.** Probar por inducción que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$

*a*) Intuición:

*b*) Teoría:

*c*) Matraca:

**P5.** Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = 2n^2 + 3n$, calcule el valor de $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{2n} u_i$ y de $u_n$.

*a*) Intuición:

*b*) Teoría:

*c*) Matraca:

**P6.** Exprese como una sumatoria y calcule el valor de la suma de los $n$-primeros términos de la siguiente sucesión:

$$\frac{1 \cdot 2^1}{3!}, \quad \frac{2 \cdot 2^2}{4!}, \quad \frac{3 \cdot 2^3}{5!}, \quad \frac{4 \cdot 2^4}{6!}, \ \ldots$$

*a*) Intuición:

*b*) Teoría:

*c*) Matraca:

**P7.** Exprese como una sumatoria y calcule el valor de la suma de los $n$-primeros términos de la siguiente sucesión:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}, \quad \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6}, \ \ldots$$

*a*) Intuición:

*b*) Teoría:

*c*) Matraca:

**P8.** Hallar el número de esferas en un apilamiento sobre una base rectangular cuyos lados contienen 15 y 20 esferas, si el tope es una línea.

*a*) Intuición:

*b*) Teoría:

*c*) Matraca:

**P9.** Verifique que la sumatoria de los $i \in \mathbb{N}$ impares que son menores que $6n$ y que no son múltiplos de 3 es $6n^2$.

*a*) Intuición:

*b*) Teoría:

*c*) Matraca:

**P10.** Para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$ sea $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

(a).- Para cada $i, j \in \{1, ..., n\}$, sea $b_{i,j} = 1$ si $j \leq i$ y $b_{i,j} = 0$ si $j > i$. Probar que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.$$

(b).- Use la parte anterior para calcular $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{n-j+1}$. $n$

*a*) Intuición:

*b*) Teoría:

*c*) Matraca:

- **Resumen**
- **[Relación]**: Es una tripleta $(A, B, \mathcal{R})$ que cumple $\mathcal{R} \subset A \times B$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ denotamos $a\mathcal{R}b$
- **[Propiedades de relaciones]**: Una relación $R$ en $A$ es:
  - **Refleja**: si $\forall x \in A$, $x\mathcal{R}x$
  - **Simétrica**: si $\forall x, y \in A$, $x\mathcal{R}yy\mathcal{R}x$
  - **Antisimétrica**: si $\forall x, y \in A$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow y = x$
  - **Transitiva**: $\forall x, y, z \in A$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$
- **[Ejemplo de relación]**: En $\mathbb{Z}$ se define la relación divisibilidad, que se anota $a|b$ si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = qa$.
- **[Relación de orden]**: $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $A$, si es una relación **refleja**, **antisimétrica** y **transitiva**.
  **Observación:** $\mathcal{R}$ es un orden total si para todo $x, y \in A$, $xey$ son comparables, es decir $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$ .
- **[Relación de equivalencia ]**:$\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $A$, si es una relación **refleja**, **simétrica** y **transitiva**.
- **[Clase de equivalencia]**: Dado un elemento $a \in A$ se define:
  $$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A \mid a\mathcal{R}x\}$$
- **[Conjunto cuociente]**: Al conjunto de las clases de equivalencia de una relación $\mathcal{R}$ se le llama conjunto cuociente, definido por:
  $$A/\mathcal{R} := \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$$
- **[Equivalencias relevantes]**: Sea $\mathcal{R}$ relación de equivalencia en $A$ y $x, y \in A$. Son equivalentes:
  I) $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}}$
  II) $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$
  III) $x\mathcal{R}y$
  IV) $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$

  **Obs.:** Con esto se deduce que $A/\mathcal{R}$
- **[Congruencia modular]**: Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define $\mathbb{Z}$ la relación $\equiv_n$ por:
  $$a \equiv_n b \iff n|(a - b)$$
- **[Teorema de División Entera]**: Sean $a, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$. Entonces existe un único par $q, r \in \mathbb{Z}$ tal que $a = q \cdot m + r$ y $0 \leq r < |m|$.
- **[Corolario]**: $\mathbb{Z}_n$ $(:= Z/\equiv_n)$ tiene $n$ elementos:
  $$\mathbb{Z}_n = \{[r]_n \mid 0 \leq r < n\}$$
- **[Sumatoria]**: Sea $(a_i)_{i \geq m}$ secuencia de números. Para $n \geq m$ se define la sumatoria de los términos de $(a_i)_{i \geq m}$ por:
  $$\sum_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m & \text{si } n = m \\ a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k & \text{si } n > m \end{cases}$$
- **[Propiedades importantes]**: Se tienen las siguientes propiedades:
  I) $\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$
  II) $\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$
  III) $\sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k$
  IV) $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s}$ para $s \in \mathbb{Z}$
  V) $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{n} a_k$
  VI) $\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$ **(Telescopica)**
- **[Sumas importantes]**: Algunas sumas relevantes:
  - $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
  - $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  - $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ con $a \neq 1$

*““No me hable de miles, háblame de millones, que yo sueno donde quiera que haya oxígeno, cabrones”!”*
*Arcángel*

# Mattoca Sumatorias

1

a) $$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{j}\left(k+\frac{2^j}{j}\right)=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{j}k+\sum_{k=1}^{j}\frac{2^j}{j}\right)=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{j(j+1)}{2}+\frac{2^j}{j}\cdot\sum_{k=1}^{j}1\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{j(j+1)}{2}+\frac{2^j}{\cancel{j}}\cdot\cancel{j}\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left(j^2+j+2^{j+1}\right)=\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{m}j^2+\sum_{j=1}^{m}j+\sum_{j=1}^{m}2^{j+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+\frac{m(m+1)}{2}\right]+\sum_{j=1}^{m}2^{j}+\overset{2^0}{1}-\overset{2^0}{1}=\frac{m(m+1)}{4}\left[\frac{2m+1+3}{3}\right]+\frac{2^{m+1}-1}{2-1}-1$$

$$=\frac{m(m+1)(m+2)}{6}+2^{m+1}-2 \;//$$

b) $$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}(k+1)+\sqrt{k+1}\cdot k}\cdot\frac{\left(\sqrt{k}(k+1)-\sqrt{k+1}\,k\right)}{\left(\sqrt{k}(k+1)-\sqrt{k+1}\,k\right)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{k}(k+1)-\sqrt{k+1}\,k}{k(k+1)^2-(k+1)k^2}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{k}(k+1)-\sqrt{k+1}\,k}{\cancel{k^3}+\cancel{2k^2}+k-\cancel{k^3}-\cancel{k^2}}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{k}(k+1)-\sqrt{k+1}\,k}{k+k^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{k}}{k}-\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}\longrightarrow \text{TELESCÓPICA}=\frac{\sqrt{1}}{1}-\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{3}}+\cdots\cancel{\frac{\sqrt{m}}{m}}-\frac{\sqrt{m+1}}{m+1}$$

$$=1-\frac{\sqrt{m+1}}{m+1}\;//$$

c) $\sum_{k=1}^{m}(k^2+1)k!$ preeliminar # $\sum_{k=1}^{m} k\,k!$

2

$$\sum_{k=1}^{m} k\,k! = \sum_{k=1}^{m} (k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{m} (k+1)k! - k! = \sum_{k=1}^{m} (k+1)! - k!$$

$$= \cancel{2!} - 1! + \cancel{3!} - \cancel{2!} + \ldots + (m+1)! - m! = (m+1)! - 1! \;//$$

Luego $\sum_{k=1}^{m}(k^2+1)k! = \sum_{k=1}^{m}(k^2+2k+1-2k)k! = \sum_{k=1}^{m}\left[(k+1)^2-2k\right]k!$

$$= \sum_{k=1}^{m}(k+1)!(k+1) - 2k\,k! = \sum_{k=1}^{m}(k+1)!(k+1) - 2\sum_{k=1}^{m} k\,k!$$

→ no hace nada

$$= \sum_{k=2}^{m+1} k\,k! - 2(m+1)! + 2\cdot 1! = \sum_{k=2}^{m+1} k\,k! - 2(m+1)! + 2$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} k\,k! - 1\cdot 1! - 2(m+1)! + 2 = (m+2)! - \cancel{1\cdot 1!} - \cancel{1\cdot 1!} - 2(m+1)! + \cancel{2}$$

$$= (m+1)m$$

P2) $\sum_{i=1}^{m} j$ $\qquad \sum_{j=1}^{m-1} j + m \qquad$ # $\sum_{j=1}^{m-1} j = \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{m(m-1)}{2}$ $\qquad$ 3

a) $$\sum_{k=1+\sum_{i=1}^{m-1} i}^{\sum_{i=1}^{m} j} 2k-1 = \sum_{k=1+\sum_{j=1}^{m-1} j}^{\sum_{j=1}^{m-1} j + m} 2k-1 = \sum_{k=1+\frac{m(m-1)}{2}}^{\frac{m(m-1)}{2}+m} 2k-1$$

$$= \sum_{k=1}^{m} 2\left(k+\frac{m(m-1)}{2}\right) - 1 = \sum_{k=1}^{m} 2k + m(m-1) - 1$$

$$= 2\frac{m(m+1)}{2} + (m-1+1)(m(m-1)) + (m-1+1)(-1)$$

$$= m(m+1) + m^2(m-1) - m \text{ //}$$

b) $$\sum_{k=1}^{m} \frac{2k+3}{k(k+1)3^k} \qquad \# \quad \frac{2k+3}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{k(A+B)+A}{k(k+1)} \Rightarrow \begin{matrix} A=3 \\ B=-1 \end{matrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{3}{k}\cdot\frac{1}{3^k} - \frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k3^{k-1}} - \frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{3^k}$$

$$= \frac{1}{1\cdot 1} - \cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{2\cdot 3}} - \cancel{\frac{1}{3\cdot 3^2}} + \_\_\_ + \cancel{\frac{1}{m3^{m-1}}} - \frac{1}{(m+1)}\cdot\frac{1}{3^m}$$

$$= 1 - \frac{1}{(m+1)3^m} \text{ //}$$

c) $\sum_{k=1}^{m} \frac{k^2+5k+5}{(k+4)!} = \sum_{k=1}^{m} \frac{k^2+6k+8 - k-3}{(k+4)!} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(k+2)(k+4)}{(k+4)!} - \frac{(k+3)}{(k+4)!}$ (4)

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{k+2}{(k+3)!} - \frac{(k+3)}{(k+4)!} = \frac{3}{4!} - \cancel{\frac{4}{5!}} + \cancel{\frac{4}{5!}} - \cancel{\frac{5}{6!}} + \ldots$$

$$+ \cancel{\frac{m+1}{(m+2)!}} - \cancel{\frac{(m+2)}{(m+3)!}} + \cancel{\frac{(m+2)}{(m+3)!}} - \frac{(m+3)}{(m+4)!}$$

$$= \frac{3}{4!} - \frac{m+3}{(m+4)!} = \frac{3}{4!} - \frac{1}{(m+2)!(m+4)}$$

$$= \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 4\cdot 2} - \frac{1}{(m+2)!(m+4)}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{(m+2)!(m+4)}$$

P3)

5

a) $\sum_{j=3}^{m-1} (j+1)(j+2) = \sum_{j=3}^{m-1} j^2 + 3j + 2 = \sum_{j=1}^{m-1} j^2 + 3\sum_{j=1}^{m-1} j + 2\sum_{j=3}^{m-1} 1 - 1^2 - 2^2$

$-3\cdot 1 - 3\cdot 2$

$= \frac{(m-1)(m)(2(m-1)+1)}{6} + 3\frac{(m-1)(m)}{2} + 2\cdot(m-1-3+1)$

$-1-4-3-6$

b) $\sum_{k=3}^{m} b_k - b_{k-3} = \sum_{k=3}^{m} b_k \underbrace{- b_{k-1} + b_{k-1}}_{0} \underbrace{+ b_{k-2} - b_{k-2}}_{0} - b_{k-3}$

$= \underbrace{\sum_{k=3}^{m} b_k - b_{k-1}}_{①} + \underbrace{\sum_{k=3}^{m} b_{k-1} - b_{k-2}}_{②} + \underbrace{\sum_{k=3}^{m} b_{k-2} - b_{k-3}}_{③}$

$=① b_3 - b_2 + b_4 - b_3 + \_\_ + b_m - b_{m-1}$

$② b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \_\_ + b_{m-1} - b_{m-2}$

$③ b_1 - b_0 + b_2 - b_1 + \_\_ + b_{m-2} - b_{m-3}$

$= b_m - b_2 + b_{m-1} - b_1 + b_{m-2} - b_0$ //

c) $\displaystyle\sum_{k=l}^{m} \left(\frac{2}{l}\right)^k =$

$\downarrow$ constante hay que ver que sea diferente de 2. pues

$\frac{2}{l} > 0$ ; $\forall\ l \in \mathbb{N}$

Si ~~l~~ Si $l = 1$ ; pues $l \neq 0$

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} (2)^k = \frac{2^{m+1} - 1}{1} - 2^0$ //

Si $l = 2$

2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{m} 1^k = m - 2 + 1$ // ; $1^k = 1$ , $\forall\ k \in \mathbb{N}$

3) Si $l \geq 3$

$\displaystyle\sum_{k=l}^{m} \left(\frac{2}{l}\right)^k = \frac{\left(\frac{2}{l}\right)^{m+1} - 1}{\frac{2}{l} - 1} - \sum_{k=1}^{l-1} \left(\frac{2}{l}\right)^k$ //

7'

P4 $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$ CASO base $n=1$ $\displaystyle\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} = \sum_{j=1}^{2} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ //

$p(2n) \Rightarrow p(2n+2) \Leftrightarrow p(2(n+1))$

HI Para algún natural

luego $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$ hipótesis

Veamos $p(2n+2) \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$

Veamos
$$\sum_{j=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$
$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$
$$= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n+2} + \frac{2}{2n+2} - \frac{2}{2n+2}$$
$$= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} \quad //$$

8

P5

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = 2m^2+3m \qquad \text{veamos} \quad \sum_{i=m+1}^{2m} u_i \quad ; \quad N = 2m$$

1) luego

$$\sum_{i=m+1}^{N} u_i = \sum_{i=1}^{N} u_i - \sum_{i=1}^{m} u_i$$

$$= 2N^2+3N - 2m^2-3m$$

$$= 2(2m)^2+3(2m) - 2m^2-3m$$

$$= 8m^2+6m-2m^2-3m = 6m^2+3m \;//$$

2)

$$u_m + \sum_{i=1}^{m-1} u_i = \sum_{i=1}^{m} u_i = 2m^2+3m$$

$$u_m = 2m^2+3m - \sum_{i=1}^{m-1} u_i = 2m^2+3m - \left(2(m-1)^2+3(m-1)\right)$$

$$= \cancel{2m^2}+3m-\cancel{2m^2}+4m-3m+3-2$$

$$= 4m+1 \;//$$

P6) 9

$$\frac{1\cdot 2^1}{3!}, \frac{2\cdot 2^2}{4!}, \text{———} \frac{k\cdot 2^k}{(k+2)}; k\in\{1,\text{———}m\}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{k\cdot 2^k}{(k+2)!}$$ ; luego $\frac{k}{(k+2)!}=\frac{A}{(k+2)!}+\frac{B}{(k+1)!}$

$\Rightarrow A=-2 \wedge B=1$ pues $k=A+B(k+2)$

$$=\sum_{k=1}^{m}2^k\cdot\frac{k}{(k+2)!}=\sum_{k=1}^{m}2^k\left(\frac{1}{(k+1)!}-\frac{2}{(k+2)!}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{2^k}{(k+1)!}-\frac{2^{k+1}}{(k+2)!}=1-\frac{2^{m+1}}{(m+2)!}$$

Expandir telescópica

10

P8| R: 1840

P9| Veamos que impares no multiplos de 3 menores a $6m$ son
impares menores a $6m$ - impares multiplos de 3 menores a $6m$
menos

Luego impares menores a $6m$ $\sum_{k=1}^{3m}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{3m} k - \sum_{k=1}^{3m} 1$

$= 9m^2$

Como $2(3m)-1 = 6m-1 < 6$, ~~mato~~ monotonía naturales

Luego impares multiplos de 3 menores a $6m$
podemos ver la sucesión $3, 9, 15, 21, 27, 33, \ldots, 6m-3$

Luego $\sum_{k=1}^{m} 3+6(k-1) = -3m + 6\frac{m(m+1)}{2} = 3m^2$

Luego $9m^2 - 3m^2 = 6m^2$ //

Ya terminamos!

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl