

MA1101-6 Introducción al Álgebra 2023, Otoño**Profesora:** Leonardo Sánchez.**Auxiliar:** Patricio Yáñez Alarcón**Correo:** pyanez@dim.uchile.cl**Auxiliar 09: Coeficientes Binomiales, cardinalidad Finita e Infinita****P1.** a) Demuestre sin usar inducción que

$$\frac{1 \binom{n}{1}}{\binom{n}{0}} + \frac{2 \binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} + \dots + \frac{n \binom{n}{n}}{\binom{n}{n-1}} = \binom{n+1}{2}.$$

Hint: Escriba la expresión de la izquierda como una sumatoria y calcúlela usando propiedades de $\binom{n}{k}$.

b) Calcule

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}.$$

P2. Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ Demuestre que

a) $|\{2i+1 : i \in \mathbb{N}, n \in \{1, \dots, m\}, 0 \leq i < 2^{n-1}\}| = 2^{m-1}.$

b) $\left| \left\{ \frac{2i+1}{2^n} : i \in \mathbb{N}, n \in \{1, \dots, m\}, 0 \leq i < 2^{n-1} \right\} \right| = 2^m - 1.$

P3. a) Sean $A_1, \dots, A_n$ conjuntos finitos. Demuestre que $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$ si y sólo si para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

b) Sea $\mathcal{C}$ una partición de un conjunto finito A de modo que para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $|X| = |Y|$. Demuestre que $|\mathcal{C}|$ divide a $|A|$.

P4. Demuestre que el siguiente conjunto es numerable:

$$C = \{x \in [0, \infty) \mid \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^n \in \mathbb{N}\}.$$

Propuestos**P5. Si nos da el tiempo**

Pruebe sin usar inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$$

P6. ¿A o B?

Sean A y B conjuntos tales que $A \cup B$ es numerable. Demuestre que A es numerable o B es numerable

P7. Biyecciones otra vez

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ numerables. Demuestre que el conjunto $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ es numerable.

P8. Demuestre que para A, B y C conjuntos finitos

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

A partir de este resultado determine el cardinal del conjunto de todos los números menores que $100 * 7 * 13 * 19$ y que sean divisibles por 7 o 13 o 19.

Selección especial Preparación C2

P9. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^n (n - i + 1) a_i$$

Sumas Dobles

P10. Si I es un conjunto finito, pruebe que el conjunto de sus partes ($\mathcal{P}(I)$) tiene cardinal finito dado por $|\mathcal{P}(I)| = 2^{|I|}$.

Bijecciones

P11. Demuestre, sin usar inducción, que

$$\sum_{i=5}^n \sum_{j=1}^i \frac{i+1}{j(j+1)} = \frac{(n-4)(n+5)}{2}$$

P12. Se define en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia. Calcule El conjunto cuociente $(\mathbb{R} \setminus \{0\})/\mathcal{R}$

Resumen

- **[Cantidad de inyecciones]:** Sean A, B conjuntos tales que $|A| = k$ y $|B| = n$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!} &= |\{f : A \longrightarrow B \mid f \text{ es inyectiva}\}| \\ &= \# \text{ de } k\text{-tuplas } B^k \text{ sin repeticiones.} \end{aligned}$$

- **[Coeficiente Binominal]:** Para dos enteros n y k , $n \geq 0$, se define

$$\binom{n}{k}$$

Este numero representa el numero de subconjuntos de tamaño k que posee un conjunto de tamaño n . Se verifica que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **[Propiedades relevantes]:**

$$\begin{aligned} \text{a) } \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \\ \text{b) } \binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \end{aligned}$$

- **[Binomio de Newton]:** Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- **[Cardinal de la imagen de un conjunto]:** Si $f : A \longrightarrow B$ función, entonces $|f(A)| \leq |A|$
- **[Conjunto numerable]:** Un conjunto A se dira numerable si $|A| = |\mathbb{N}|$. En particular tenemos que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables.
- **[Propiedades Cardinal infinito]:** Sea A conjunto infinito, entonces:

$$\text{I) Si } A \text{ infinito y } B \text{ finito, entonces } |A| = |A \cup B| = |A \setminus B|$$

$$\text{II) } \forall k \in \mathbb{N}, \text{ existe un conjunto } B_k \text{ tal que } B_k \subseteq A \text{ y } |B_k| = k.$$

$$\text{III) } |A| \geq |\mathbb{N}| \text{ es decir el cardinal de los naturales es el menor cardinal infinito.}$$

Obs.: Si $|A| \leq |\mathbb{N}|$ entonces A es numerable.

- **[Álgebra de numerables]:**

$$\text{I) La unión numerable o finita de conjuntos numerables o finitos } (A_i)_{i \in I} \text{ (con } I \subseteq \mathbb{N}) \text{ es a lo más numerable, es decir:}$$

$$A := \bigcup_{i \in I} A_i$$

Cumple que $|A| \leq |\mathbb{N}|$

$$\text{II) La unión finita de conjuntos numerables } (A_i)_{i=1}^n \text{ es numerable, es decir:}$$

$$A := \bigcup_{i=1}^n A_i$$

Es numerable.

$$\text{III) La unión numerable de conjuntos numerables } (A_i)_i^n \text{ es numerable, es decir:}$$

$$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

Es numerable.

$$\text{IV) El producto cartesiano finito de conjuntos numerables } (A_i)_{i=1}^n \text{ es numerable, es decir:}$$

$$A := \prod_{i=1}^n A_i$$

Es numerable.

“No tengo frase, pero que les vaya bacan!”

Pato