MA1101-6 Introducción al Álgebra 2023, Otoño
Profesor: Leonardo Sánchez.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 08: Sumatorias

15 de Mayo

P1. Calcule:

(a).- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\Big(k+\frac{2^j}{j}\Big)$.

(b).- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$

(c).- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k!$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P2. Calcule:

(a).- $\displaystyle\sum_{k=1+\sum_{i=1}^{n-1} i}^{\sum_{j=1}^{n} j}(2k-1)$

(b).- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{k(k+1)3^k}$

(c).- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+5k+5}{(k+4)!}$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P3. ***Sumatorias varias***

Calcule las siguientes sumatorias:

a) $\displaystyle\sum_{j=3}^{n-1}(j+1)(j+2)$

b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} b_k - b_{k-3}$

c) $\displaystyle\sum_{k=l}^{n}\left(\frac{2}{l}\right)^k$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2^{i+1}\frac{i}{(i+1)(i+2)}$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i2^i$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P4. Probar por inducción que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P5. Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = 2n^2 + 3n$, calcule el valor de $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{2n} u_i$ y de u_n.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P6. Exprese como una sumatoria y calcule el valor de la suma de los n-primeros términos de la siguiente sucesión:

$$\frac{1 \cdot 2^1}{3!}, \quad \frac{2 \cdot 2^2}{4!}, \quad \frac{3 \cdot 2^3}{5!}, \quad \frac{4 \cdot 2^4}{6!}, \ \ldots$$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P7. Exprese como una sumatoria y calcule el valor de la suma de los n-primeros términos de la siguiente sucesión:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}, \quad \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6}, \ \ldots$$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P8. Hallar el número de esferas en un apilamiento sobre una base rectangular cuyos lados contienen 15 y 20 esferas, si el tope es una línea.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P9. Verifique que la sumatoria de los $i \in \mathbb{N}$ impares que son menores que $6n$ y que no son múltiplos de 3 es $6n^2$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P10. Para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$ sea $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

(a).- Para cada $i, j \in \{1, ..., n\}$, sea $b_{i,j} = 1$ si $j \leq i$ y $b_{i,j} = 0$ si $j > i$. Probar que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.$$

(b).- Use la parte anterior para calcular $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{n-j+1}$. n

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

- **Resumen**
- [**Relación**]: Es una tripleta $(A, B, \mathcal{R})$ que cumple $\mathcal{R} \subset A \times B$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ denotamos $a\mathcal{R}b$
- [**Propiedades de relaciones**]: Una relación R en A es:
  - **Refleja**: si $\forall x \in A$, $x\mathcal{R}x$
  - **Simétrica**: si $\forall x, y \in A$, $x\mathcal{R}yy\mathcal{R}x$
  - **Antisimétrica**: si $\forall x, y \in A$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow y = x$
  - **Transitiva**: $\forall x, y, z \in A$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$
- [**Ejemplo de relación**]: En $\mathbb{Z}$ se define la relación divisibilidad, que se anota $a|b$ si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = qa$.
- [**Relación de orden**]: $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A, si es una relación **refleja**, **antisimétrica** y **transitiva**.
  Observación: $\mathcal{R}$ es un orden total si para todo $x, y \in A$, xey son comparables, es decir $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$.
- [**Relación de equivalencia**]:$\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A, si es una relación **refleja**, **simétrica** y **transitiva**.
- [**Clase de equivalencia**]: Dado un elemento $a \in A$ se define:

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A \mid a\mathcal{R}x\}$$

- [**Conjunto cuociente**]: Al conjunto de las clases de equivalencia de una relación $\mathcal{R}$ se le llama conjunto cuociente, definido por:

$$A/\mathcal{R} := \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$$

- [**Equivalencias relevantes**]: Sea $\mathcal{R}$ relación de equivalencia en A y $x, y \in A$. Son equivalentes:
  I) $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}}$
  II) $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$
  III) $x\mathcal{R}y$
  IV) $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$

  Obs.: Con esto se deduce que $A/\mathcal{R}$
- [**Congruencia modular**]: Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define $\mathbb{Z}$ la relación $\equiv_n$ por:

$$a \equiv_n b \Longleftrightarrow n|(a - b)$$

- [**Teorema de División Entera**]: Sean $a, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$. Entonces existe un único par $q, r \in \mathbb{Z}$ tal que $a = q \cdot m + r$ y $0 \leq r < |m|$.
- [**Corolario**]: $\mathbb{Z}_n$ $(:= Z/\equiv_n)$ tiene n elementos:

$$\mathbb{Z}_n = \{[r]_n \mid 0 \leq r < n\}$$

- [**Sumatoria**]: Sea $(a_i)_{i \geq m}$ secuencia de números. Para $n \geq m$ se define la sumatoria de los términos de $(a_i)_{i \geq m}$ por:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m & \text{si } n = m \\ a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k & \text{si } n > m \end{cases}$$

- [**Propiedades importantes**]: Se tienen las siguientes propiedades:
  I) $\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$
  II) $\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$
  III) $\sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k$
  IV) $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s}$ para $s \in \mathbb{Z}$
  V) $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{n} a_k$
  VI) $\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$ **(Telescopica)**
- [**Sumas importantes**]: Algunas sumas relevantes:
  - $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
  - $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  - $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ con $a \neq 1$

""No me hable de miles, háblame de millones, que yo sueno donde quiera que haya oxígeno, cabrones"!"
Arcángel