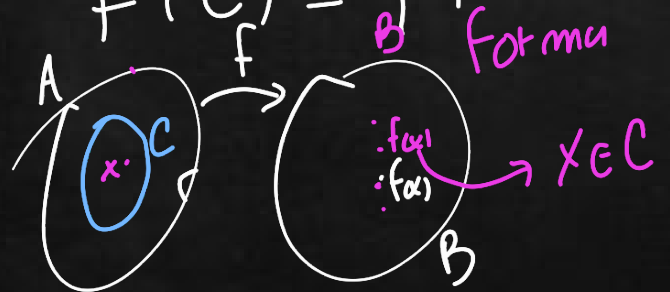
Partimos en breve,
Estoy enviando el link
Pato Aux :)

→ Preimagen e Imagen
→ Relación → Clase equivalencia
→ Conjunto cociente
→ Relación de relaciones

Conjunto Imagen $f: \underset{\text{Dom}}{A} \to \underset{\text{Cod.}}{B}$

$\boxed{C \subseteq A}$, defino conjunto imagen de $C$.

$$f(C) = \{ \underbrace{f(x) \in B}_{\text{Forma}}, \underbrace{x \in C}_{\text{Propiedad}} \}$$



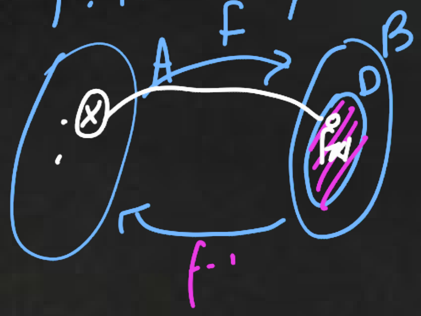

Imagen

$\iff \forall y \in B, [y \in f(C) \iff (\underline{\exists x \in C}, \underline{f(x)=y})]$

alguien(y) pertenece a la imagen

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$\boxed{\text{Preimagen}}$ Sea $f: A \to B$, $D \subseteq B$




Si veo la notación $f^{-1}(\ )$ → Es preimagen a menos que me digan lo contrario.

f6 apunte

$f^{-1}(D) = \{x \in A, f(x) \in D\}$

forma , propiedad

!! Lo más Importante de Preimagen

Preimagen $\iff \forall x \in A, [x \in f^{-1}(D) \overset{f}{\iff} f(x) \in D]$

Esto es un compadre que pertenece a la preimagen

$f(f^{-1}(D))$

Def Preimagen ~~$f^{-1}(\ )$~~

$\boxed{\begin{array}{c} x \in f^{-1}(D) \\ \iff f(x) \in D \end{array}}$

$\boxed{\text{Def preimagen}}$

PREGUNTA

Sea $f : E \to F$ y $g : F \to G$ funciones.

a) Sea $A \subseteq G$. Probar que:

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

b) Sea $B \subseteq F$. Probar que:

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$$

P1) $f: E \to F$, $g: F \to G$


, $A \subseteq G$

$$\boxed{(g\circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))}$$

Es una igualdad de conjuntos la forma de probarlo es $X = Y$ yo pruebo $x \in X \subseteq x \in Y \wedge Y \subseteq X$, Entonces

Probaremos $(g\circ f)^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(A)) \wedge f^{-1}(g^{-1}(A)) \subseteq (g\circ f)^{-1}(A)$.

Diremos sea SPG → sin pérdida de generalidad porque $x$ arbitrario

BOG

$$x \in (g\circ f)^{-1}(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$$

$$(g\circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(\ ^{-1}(A)) \quad \subseteq \quad \Leftarrow \quad \supseteq$$

$\cancel{(g\circ f)(x)}$ No escriban eso

$$x \in \underbrace{(g\circ f)}_{h}{}^{-1}(A)$$

$x \in h^{-1}(A)$ $\cancel{h(x)}$ Def preimagen

$\Leftrightarrow h(x) \in A$

$\Leftrightarrow (g\circ f)(x) \in A$ Def composición funciones

$\Leftrightarrow g(f(x)) \in A$ $\cancel{g(x)}$ Def preimagen

$\Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(A)$ / $f(x) \in g^{-1}(A) \Leftrightarrow g(f(x)) \in A$ $\cancel{g^{-1}(x)}$ Def preimagen

$\cancel{f^{-1}(x)}$ Def preimagen

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$

$x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$ $\overleftarrow{f^{-1}(x)}$ Def preimagen $\Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(A)$ $\cancel{f(x)}$ Def preimagen

tengo $(g\circ f)^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(A))$ y como son $\Leftrightarrow$ equivalencias tengo $(g\circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ //

$X \subseteq Y$

$\Leftrightarrow \forall x \in X \Rightarrow x \in Y$

Def Preimagen

$$\forall x \in A \left[ x \in h^{-1}(D) \underset{h(\,)}{\overset{h^{-1}(\,)}{\Leftrightarrow}} h(x) \in D \right.$$

*

$\Leftrightarrow g(f(x)) \in A$ , la imagen de g bien definida

$\Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(A)$ la imagen de f bien definida

PREGUNTA

Sea $f : E \to F$ y $g : F \to G$ funciones.

a) Sea $A \subseteq G$. Probar que:

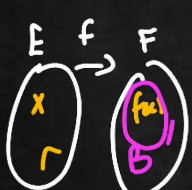
$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

b) Sea $B \subseteq F$. Probar que:

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$$

b) $\boxed{B \subseteq F, \text{ PDQ } f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)}$ Espacio.

Me piden probar una igualdad conjuntos




SPG

Sea $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow y \in B \cap f(E)$

$y \in f(f^{-1}(B)) \rightarrow$ $\boxed{\text{Def Imagen } \forall y \in B, [y \in f(A') \Leftrightarrow \exists x \in A', f(x) = y]}$

$\Leftrightarrow \exists x \in f^{-1}(B), \boxed{f(x) = y}$ * Def Imagen

$| \cancel{f(x)}$

$\Leftrightarrow f(x) \in B$, $\forall$ Dgf preimagen

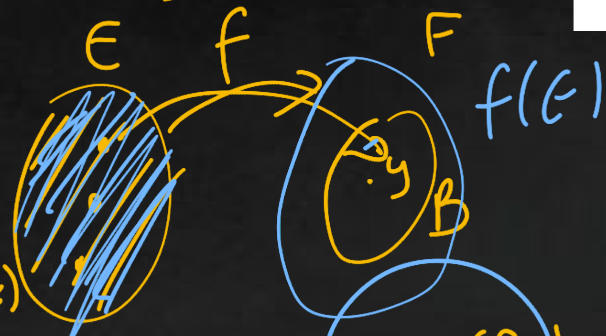
$\boxed{f(x) = y}$ ★

$\Leftrightarrow y \in B$,

$\Leftrightarrow y \in B \wedge \boxed{V}$

$\Leftrightarrow y \in B \wedge y \in f(E)$

$\Leftrightarrow y \in B \cap f(E)$ //




, $y \in f(E) \Leftrightarrow V$

$f(x)$ todos los imagenes posible

$\therefore f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$

# Lo más importante

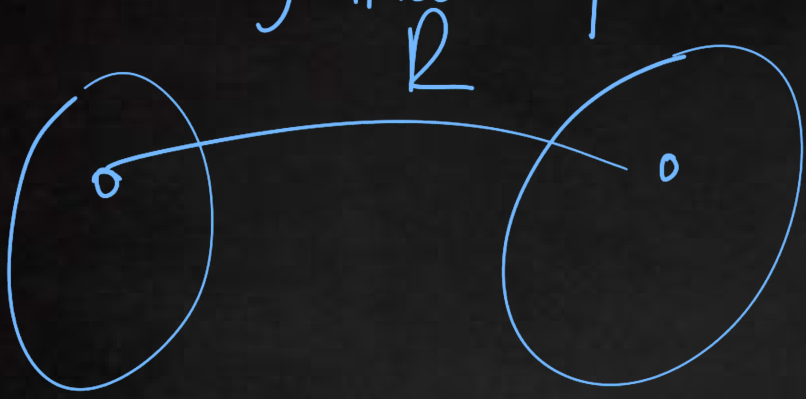
1) Si $y \in f(A) \iff \exists x \in A, f(x) = y$

$f^{-1}(\ )x$ → Def Preimagen truco

2) $x \in f^{-1}(D) \iff f(x) \in D$

$f(\ )x$

Relación (tomar elementos conjuntos y hacer que interactuen)






- Refleja
- simetrica
- anti simetrica
- transitiva

relación orden

relación Equivalencia

orden Alfabético | rATas ordenadas

NTiSETRiA

EfljA

mtisimEtria

rAnsitiva

relación orden (Refleja, anti sim, trans)
relación equivalencia (Refleja, simetrica, trans)

relacion $\frac{n}{3}$ → resto al dividir

$R_1$

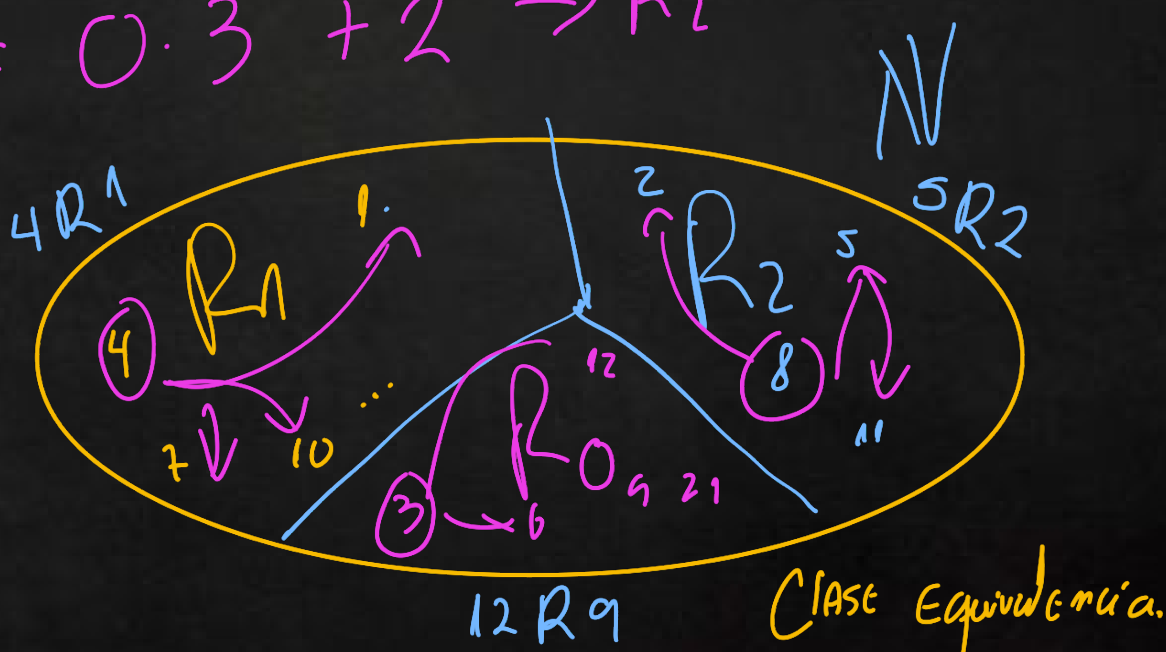
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | $R_2$ | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_0$... |

$4/3 = 1$ resto $1$

$4 = 3 \cdot 1 + 1$
Resto

$1/3 = 0 \cdot 3 + 1 \rightarrow R_1$

$2/3 = 0 \cdot 3 + 2 \rightarrow R_2$



Se $n$ natural

$n = 3k$
$n = 3k+1$
$n = 3k+2$

Clase equivalencia $[a]_R = \{x \in A, aRx\}$ todos los x que se relacionan con a; forma propiedad

R es el resto al dividir en 3

$[4]_R = \{x \in \mathbb{N}, 4Rx\}$
$= \{x \in \mathbb{N}, x = 3k+1\}$, $k \in \mathbb{N}$

Conjunto cociente: Contiene todas las clases de equivalencia

$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$

, $1 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{N}$, $3 \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{N}/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$

$= \{\{3k+1\}, \{3k+2\}, \{3k\}\}$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$A \neq \emptyset$ $\qquad$ $f: A \to A$

P1)

1. Sea $A$ un conjunto no vacío y $f : A \to A$ una función que satisface la condición siguiente:

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tal que } f^{(n)} = \mathrm{id}_A.}$$

componer $n$ veces

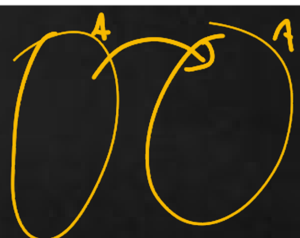
Se define en $A$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x\mathcal{R}y \iff \exists k \in \{1, 2, ..., n\} \text{ tal que } f^{(k)}(x) = y.$$

función

a) (30 min.) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.
b) Considere $A = \{0,1\}^3$ y $f : A \to A$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$
   1) (10 min.) Pruebe que $f$ satisface la propiedad enunciada.
   2) (20 min.) Determine y escriba todas las clases de equivalencia inducidas por $\mathcal{R}$ en $A$.

$\underbrace{(f \circ f \circ f \ldots \circ f)}_{n \text{ veces}} = X = id_A$ $\qquad$ $f^{(2)}$ $\qquad$ $F \circ f$




la relación $R$ es tal

$$xRy \iff f^{(k)}(x) = y$$

$$\underbrace{f \circ f \circ \ldots f}_{k}(x) = y$$

2) PDQ relación equivalencia.

- ) Refleja
- ) simétrica
- ) transitiva.

1) $xRx$

Sea $x \in A$, dado $f$, $\exists k \in \{1, 2, 3 \ldots n\}$ / $\boxed{f^{(k)}(x) = x}$ PDQ, $k = n$ pues la identidad la tengo para $n$ veces.

$$\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ veces}}(x) = \underbrace{f^{(n)}(x) = x}_{\text{Prop. enunciado}}$$

$Id_A$

$f(x) = x$

$= x$

$\therefore$ Refleja

- ) Simétrica. $xRy \Leftrightarrow yRx$

Sea $x, y \in A$, como $xRy \Leftrightarrow yRx$

$xRy \Leftrightarrow \exists k_1$ tq $f^{(k_1)}(x) = y$ Compongo $f^{(n-k_1)}(\,)$

$x^2 + 1 = 7 \,/ g(\,)$

$g(x^2+1) = g(7)$

$$\underbrace{f \circ f \circ \ldots f}_{k_1 \text{-veces}}(x) = y \,/ f^{(n-k_1)}(\,)$$

$$f^{(k_1)} \circ f^{(n-k_1)}(x) = f^{(n-k_1)}(y)$$

$$f^{(k_1+m-k_1)}(x) = f^{(m-k_1)}(y)$$

IDA

$$x = f^{(m)}(x) = f^{(m-k_1)}(y)$$

Prop Enunciado

$y R x$, $\exists k_2$

$f^{(k_2)}(y) = x$

$$\boxed{x = f^{(m-k_1)}(y)}$$

$k_2 \in \{1 \dots m\}$

$m - k_1 \in \mathbb{N}$

$k_2 \in \mathbb{N}$

, $\exists k_2 \in \{1, 2, \dots m\}$

$\Leftrightarrow y R x$ ✓ $\therefore$ Simetría.

$$x^2 + 1 = 5 \quad / g(\;)$$

$$g(x^2+1) = g(5) \quad / g(\;)$$

$$g^{(2)}(x^2+1) = g^{(2)}(5)$$

$\vdots$

$\Downarrow$

$$g^{(m-k_1)}(x^2+1) = g^{(m-k_1)}(5) \quad / g^{(m-k_1)}(\;)$$

Transitividad $x, y, z \in A$

① $xRy$ ② $yRz \Rightarrow$ ③ $xRz$

① $xRy \iff \exists\, k_1 \in \{1 \dots n\},\ f^{(k_1)}(x) = y$

② $yRz \iff \exists\, k_2 \in \{1 \dots n\},\ f^{(k_2)}(y) = z$

Hipótesis

PDQ ③ $xRz \iff \exists\, k_3 \in \{1 \dots n\},\ f^{(k_3)}(x) = z$ & lo quiero

① $f^{(k_1)}(x) = y \ / \ f^{(k_2)}(\ )$

$$f^{(k_1+k_2)}(x) = f^{(k_2)}(y) = z$$

②

$n < \underbrace{k_1+k_2}_{k_1+k_2-n} < \underset{\overset{\|}{n}}{2n}$

$$f^{(k_1+k_2)}(x) = z, \quad \underbrace{k_1+k_2}_{k_3} \in \{1, \dots n\}$$

$$f^{(k_3)}(x) = z, \quad \exists\, k_3 ..$$

$\iff xRz \quad \therefore$ transitiva

$$f^{(k_1+k_2)}(x) = f^{(n)} \circ f^{(k_1+k_2-n)}(x) = z$$

$\therefore$ Relación equivalencia.

b)

1. Sea $A$ un conjunto no vacío y $f : A \to A$ una función que satisface la condición siguiente:

$$\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tal que } f^{(n)} = \mathrm{id}_A.$$

Se define en $A$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x\mathcal{R}y \iff \exists k \in \{1, 2, ..., n\} \text{ tal que } f^{(k)}(x) = y.$$

a) (30 min.) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

b) Considere $A = \{0,1\}^3$ y $f : A \to A$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$

1) (10 min.) Pruebe que $f$ satisface la propiedad enunciada.

2) (20 min.) Determine y escriba todas las clases de equivalencia inducidas por $\mathcal{R}$ en $A$.

$A = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} = \{0,1\}^3$

$f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}^3$

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$

Enunciado

1. Sea $A$ un conjunto no vacío y $f : A \to A$ una función que satisface la condición siguiente:

$$\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tal que } f^{(n)} = \mathrm{id}_A.$$

Se define en $A$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x\mathcal{R}y \iff \exists k \in \{1, 2, ..., n\} \text{ tal que } f^{(k)}(x) = y.$$

a) (30 min.) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

b) Considere $A = \{0,1\}^3$ y $f : A \to A$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$

1) (10 min.) Pruebe que $f$ satisface la propiedad enunciada.

2) (20 min.) Determine y escriba todas las clases de equivalencia inducidas por $\mathcal{R}$ en $A$.

Lo que quiero probar es que $f^{(n)}(x) = \mathrm{id}_A$

$f^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$ / $f(\;)$

$f^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3, x_1) = (x_3, x_1, x_2)$

$f^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$ / $f(\;)$

$f^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = f(x_3, x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_3) = Id_{\{0,1\}^3}$

$n = 3$ a ✓

b.2)

1. Sea $A$ un conjunto no vacío y $f : A \to A$ una función que satisface la condición siguiente:

$$\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tal que } f^{(n)} = \mathrm{id}_A.$$

Se define en $A$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x\mathcal{R}y \iff \exists k \in \{1, 2, ..., n\} \text{ tal que } f^{(k)}(x) = y.$$

a) (30 min.) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

b) Considere $A = \{0,1\}^3$ y $f : A \to A$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$

1) (10 min.) Pruebe que $f$ satisface la propiedad enunciada.

2) (20 min.) Determine y escriba todas las clases de equivalencia inducidas por $\mathcal{R}$ en $A$.

$[a]_R = \{ x \in A, \; x R a \}$

Clases de equivalencia inducidas por $R$ en $\{0,1\}^3$

$A = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$(0,0,0)$

$(1,1,1)$

$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

$(0,1,1)\ (1,0,1), (1,1,0)$

f desordena coordenadas

1) $[(0,0,0)]_{\{0,1\}^3} = \{(x,y,z) \in \{0,1\}^3 \mid (0,0,0) R (x,y,z)\}$
$= \{(0,0,0)\}$

2) $[(1,1,1)]_{\{0,1\}^3} = \boxed{\{(x,y,z) \in \{0,1\}^3 \mid (1,1,1) R (x,y,z)\}}$

forma propiedad

$= \{(1,1,1)\}$

3) $[(1,0,0)]_{\{0,1\}^3} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$
$= \{(x,y,z) \in A,\ (1,0,0) R (x,y,z)\}$

4) $[(1,1,0)]_{\{0,1\}^3} = \{(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}$
$= \{(x,y,z) \in A,\ (1,1,0) R (x,y,z)\}.$

**P1** **(a)** La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $x \in A$, dada la propiedad de $f$ si se toma $k = n$ se tiene que $f^{(n)}(x) = x \Leftrightarrow xRx$.
- Simétrica: Sean $x, y \in A$, como $xRy$ existe un $k_1$ tal que $f^{(k)}(x) = y$, luego componiendo la funcion $n - k$ veces se tiene que $f^{(n-k+k)}(x) = x = f^{(n-k)}(y) \Leftrightarrow yRx$.
- Transitiva: Sean $x, y, z \in A$, como $xRy$ existe un $k$ tal que $f^{(k_1)}(x) = y$, y también como $yRz$ existe un $k_2$ tal que $f^{(k_2)}(y) = z$, si $f^{(k_1)}(x) = y$ se compone $k_2$ veces se obtiene $f^{(k_1+k_2)}(x) = f^{(k_2)}(y) = z \Leftrightarrow xRz$ existe la posibilidad que $2n > k_1 + k_2 > n$ en ese caso en vez de tomar $k_1 + k_2$ se toma $k_1 + k_2 - n$, en donde claramente $k_1 + k_2 - n < n$ y además $f^{(k_1+k_2)}(x) = f^{(n)} \circ f^{(k_1+k_2-n)}(x) = f^{(k_1+k_2-n)}(x) = z$.

Luego la relación es de equivalencia.

**(b)** **b.1** Para $n = 3$ se tiene $f^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = f^{(2)}(x_2, x_3, x_1) = f(x_3, x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_3)$

**b.2** $[(0,0,0)]_A = \{(x,y,z) \in \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \mid (0,0,0)R(x,y,z)\} = \{(0,0,0)\}$
$[(1,1,1)]_A = \{(x,y,z) \in A \mid (1,1,1)R(x,y,z)\} = \{(1,1,1)\}$
$[(1,0,0)]_A = \{(x,y,z) \in A \mid (1,0,0)R(x,y,z)\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$
$[(1,1,0)]_A = \{(x,y,z) \in A \mid (1,1,0)R(x,y,z)\} = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$

2. Sea $E$ un conjunto y $A \neq \emptyset$ un subconjunto fijo de $E$. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$X\mathcal{R}Y \iff A \cap X = A \cap Y$$

a) (10 min.) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.
b) (15 min.) Demuestre que el conjunto cuociente $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} = \{[X] \mid X \in \mathcal{P}(A)\}$.
c) (15 min.) Demuestre que para $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ se tiene que $X \neq Y \implies [X] \neq [Y]$.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

**P2** **(a)** La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $X \in P(E)$, claramente $A \cap X = A \cap X \Leftrightarrow X\mathcal{R}X$.
- Simétrica: Sean $X, Y \in P(E)$, como $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y \Leftrightarrow A \cap Y = A \cap X \Leftrightarrow Y\mathcal{R}X$.
- Transitiva: Sean $X, Y, Z \in P(E)$, como $X\mathcal{R}Y$ y $Y\mathcal{R}Z$ se tiene que $A \cap X = A \cap Y = A \cap Z \Rightarrow A \cap X = A \cap Z \Leftrightarrow X\mathcal{R}Z$.

Luego la relación es de equivalencia.

**(b)** Primero demostraremos que $\{[X]/X \in P(A)\} \subseteq P(E)/\mathcal{R}$, es claro que $A \subseteq E$ luego $P(A) \subseteq P(E)$ y con esto $\{[X]/X \in P(A)\} \subseteq P(E)/\mathcal{R}$, para la otra inclusión tomamos un $C \in P(E)/\mathcal{R}$ esto quiere decir que $C = [M]$ con $M \in P(E)$, si tomamos un conjunto $X = A \cap M$, se puede ver que $X\mathcal{R}M$, en efecto

$$\begin{aligned} & X = A \cap M \qquad \backslash\text{intersectando con } A \\ & A \cap X = A \cap A \cap M \\ & A \cap X = A \cap M \\ \Leftrightarrow\ & X\mathcal{R}M \end{aligned}$$

Pero como $X \subseteq A$ ($A \cap M \subseteq A$), quiere decir que $X \in P(A)$, además dado $X\mathcal{R}M$ significa que $C = [M] = [X]$ con $C \in \{[X]/X \in P(A)\}$.

**(c)** Por contrarecíproca, como $[X] = [Y]$ esto quiere decir que $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$, pero además $X, Y \in P(A)$, luego $X \subseteq A$ e $Y \subseteq A$, lo que significa que $X = A \cap X$ y que $Y = A \cap Y$, juntando ambas ecuaciones resulta que $X = Y$.

3. Considere el conjunto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en $A$ por:

$$(a_1, a_2)\ \mathcal{R}\ (b_1, b_2) \iff a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k \text{ para un cierto } k \in \mathbb{Z}.$$

a) (30 min.) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
b) (10 min.) Calcular explícitamente $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$ y $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$.
c) (10 min.) Pruebe que $A = [(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}}$.
d) (10 min.) Pruebe que existe una biyección $f : [(1,0)]_{\mathcal{R}} \to [(0,0)]_{\mathcal{R}}$.

**P3** **(a)** La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $(a_1, a_2) \in A$, tomando $k = 0$, es lo mismo que $2 \cdot 0 = a_1 + a_2 - a_1 - a_2 \Leftrightarrow (a_1, a_2)\mathcal{R}(a_1, a_2)$.
- Simétrica: Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A$, como $(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$, reordenando la expresión: $a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k \Leftrightarrow -(b_1 + b_2 - a_1 - a_2) = 2k \Leftrightarrow b_1 + b_2 - a_1 - a_2 = 2(-k)$, llamando $k' = -k$, que claramente es entero, tenemos que $b_1 + b_2 - a_1 - a_2 = 2k' \Leftrightarrow (b_1, b_2)\mathcal{R}(a_1, a_2)$.
- Transitiva: Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in A$ como $(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k$ y $(b_1, b_2)\mathcal{R}(c_1, c_2) \Leftrightarrow b_1 + b_2 - c_1 - c_2 = 2j$ con $k, j \in \mathbb{Z}$ Sumando ambas expresiones tenemos como resultado $a_1 + a_2 - b_1 - b_2 + b_1 + b_2 - c_1 - c_2 = a_1 + a_2 - c_1 - c_2 = 2(k + j)$ llamando $m = k + j$ que claramente es entero porque la suma en $\mathbb{Z}$ es cerrada, se tiene que $a_1 + a_2 - c_1 - c_2 = 2m \Leftrightarrow (a_1, a_2)\mathcal{R}(c_1, c_2)$.

Luego la relación es de equivalencia.

**(b)**

$$[(0,0)]_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (0,0)\mathcal{R}(x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = -2k\}$$

Este conjunto son los pares ordenados de números tales que la suma de sus componentes es par, esto solamente se puede dar si tenemos: (par,par) o (impar, impar), (números de igual paridad).

$$[(1,0)]_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (1,0)\mathcal{R}(x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = -2k + 1\}$$

Este conjunto son los pares ordenados de números tales que la suma de sus componentes es impar, esto solamente se puede dar si tenemos: (par,impar) o (impar, par), (números de distinta paridad).

**(c)** Es claro que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}} \subseteq A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (los pares ordenados fueron sacados de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$), falta demostrar la otra inclusión: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq [(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}}$ En efecto, sea $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dicho par ordenado puede tener algunas de estas 4 combinaciones posibles:

- (par,par), en este caso pertenece a $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$
- (impar,impar), en este caso pertenece a $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$
- (impar,par), en este caso pertenece a $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$
- (par,impar), en este caso pertenece a $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$

Luego con esto se ha probado la inclusión que faltaba, se concluye que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

**(d)** Lo que se pide encontrar acá es una función tal que lleve los números $(x, y)$ de distinta paridad a tener la misma paridad, entendiendo esto, bastaría una función $f : [(1,0)]_{\mathcal{R}} \to [(0,0)]_{\mathcal{R}}$ tal que $(x, y) \to f(x, y) = (x + 1, y)$, por ejemplo, si tomamos el par $(3, 8)$ que está en $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$, al aplicarle la función quedaría $(3 + 1, 8) = (4, 8)$ que ahora pertenece a $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$, esta función es biyectiva, es de 2 variables, pero la pueden ver como dos funciones por separado $f_1(x) = x + 1$ y $f_2(y) = y$ esto es debido a que las componentes de los pares ordenados son independientes entre sí, claramente $f_1$ y $f_2$ son biyectivas, luego $f$ es biyectiva.

4. Sea $p \in \mathbb{Z}, p \geq 2$. Se define en $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ la relación $\Omega_p$ por:

$$x\Omega_p y \iff \exists \alpha \in \mathbb{Z},\ \frac{x}{y} = p^\alpha.$$

a) (20 min.) Demostrar que $\Omega_p$ es relación de equivalencia en $\mathbb{Q}^+$.

b) (10 min.) Describa por extensión $[1]_{\Omega_2}$.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

**P4** **(a)** La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $x \in Q_+$, tomando $\alpha = 0$ se tiene que $p^\alpha = 1 = \frac{x}{x} \Leftrightarrow x\Omega_p x$.
- Simétrica: Sean $x, y \in Q_+$ como $x\Omega_p y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = p^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{Z}$ reordenando se tiene $\frac{y}{x} = p^{-\alpha}$, luego eligiendo $\beta = -\alpha$ que claramente pertenece a $\mathbb{Z}$, se tiene que $\frac{y}{x} = p^\beta \Leftrightarrow y\Omega_p x$.
- Transitiva: Sean $x, y, z \in Q_+$ como $x\Omega_p y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = p^\alpha$ e $y\Omega_p z \Leftrightarrow \frac{y}{z} = p^\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ , multiplicando ambas expresiones se tiene que $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = p^{(\alpha+\beta)}$, eligiendo $\gamma = \alpha + \beta$ que claramente pertenece a $\mathbb{Z}$ porque la suma en $\mathbb{Z}$ es cerrada, se tiene que $\frac{x}{z} = p^\gamma \Leftrightarrow x\Omega_p z$.

Luego la relación es de equivalencia.

**(b)**

$$[1]_{\Omega_2} = \{x \in Q_+ \mid 1\Omega_2 x\} = \{x \in Q_+ \mid x = 2^{-\alpha}\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., 2, 4, 8...\right\}$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

fcfm
Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

2. Determine los valores de:

(a) $\operatorname{sen}(270° + 2\alpha)$ si $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{3}{5}$ y $0 < \alpha < \pi/2$.

(b) $\tan(\alpha + 120°)$ si $\cos(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

3. Demostrar que $\cos(420° + \alpha) + \cos(60° - \alpha) = \operatorname{sen}(90° - \alpha)$.

4. En cada caso, encuentre el valor de las funciones trigonométricas de $\theta$ si:

(a) $0 \le \theta \le \pi/2$ y $\tan(\theta) = 3/4$.

(b) $\pi/2 \le \theta \le \pi$ y $\tan(\theta) = -8/15$.

(c) $\operatorname{sen}(\theta) < 0$ y $\sec(\theta) = 6/5$.

(d) $3\pi \le \theta \le 7\pi/2$ y $\csc(\theta) = -\sqrt{10}/3$.

(e) $\tan(\theta) = -3/4$ y $\operatorname{sen}(\theta) > 0$.

(f) $\cos(\theta) = -1/3$ y $\operatorname{sen}(\theta) < 0$.

5. Use identidades (y valores conocidos de fun. trigonométricas) para encontrar el valor exacto de la expresión

(a) $\cos(15°)$

(b) $2\operatorname{sen}(\pi/12)\cos(\pi/12)$

(c) $\operatorname{sen}(5°)\cos(40°) + \cos(5°)\operatorname{sen}(40°)$

(d) $\dfrac{\tan(\pi/18) + \tan(\pi/9)}{1 - \tan(\pi/18)\tan(\pi/9)}$

(e) $\dfrac{\tan(73°) - \tan(13°)}{1 + \tan(73°)\tan(13°)}$

6. Verifique las siguientes identidades:

(a) $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\csc(\alpha/2)} + \dfrac{\cos(\alpha/2)}{\sec(\alpha/2)} = 1$

(b) $\sec(\alpha) - \cos(\alpha) = \tan(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)$

(c) $\tan(2x) = \dfrac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{2\cos^2(x) - 1}$

(d) $\dfrac{1 + \cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x) - \cos(x)} = \dfrac{2\cos(x)}{2\operatorname{sen}(x) - 1}$

(e) $\cos^4(x) - \sin^4(x) - \cos^2(x) = -\sin^2(x)$

(f) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} = \csc(x) - \cot(x)$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

TAREA
Cálculo
PARA
MAÑANA

2 Tenemos:

(a) $\operatorname{sen}(270° + 2\alpha) = -7/25$.

(b) $\tan(\alpha + 120°) = -1/\sqrt{3}$.

4 (a) $\operatorname{sen}(\theta) = 3/5$, $\cos(\theta) = 4/5$, $\tan(\theta) = 3/4$, $\cot(\theta) = 4/3$, $\csc(\theta) = 5/3$ y , $\sec(\theta) = 5/4$.

(b) $\operatorname{sen}(\theta) = 8/17$, $\cos(\theta) = -8/17$, $\tan(\theta) = -8/15$, $\cot(\theta) = -15/8$, $\csc(\theta) = 17/8$ y $\sec(\theta) = -17/8$.

(c) $\operatorname{sen}(\theta) = -\sqrt{11}/6$, $\cos(\theta) = 5/6$, $\tan(\theta) = -\sqrt{11}/5$, $\cot(\theta) = -5/\sqrt{11}$, $\csc(\theta) = -6/\sqrt{11}$ y $\sec(\theta) = 6/5$.

(d) $\operatorname{sen}(\theta) = -3/\sqrt{10}$, $\cos(\theta) = -1/\sqrt{10}$, $\tan(\theta) = 3$, $\cot(\theta) = 1/3$, $\csc(\theta) = -\sqrt{10}/3$ y $\sec(\theta) = -\sqrt{10}$.

(e) $\operatorname{sen}(\theta) = 3/5$, $\cos(\theta) = -4/5$, $\tan(\theta) = -3/4$, $\cot(\theta) = -4/3$, $\csc(\theta) = 5/3$ y $\sec(\theta) = -5/4$.

(f) $\operatorname{sen}(\theta) = -\sqrt{8}/3$, $\cos(\theta) = -1/3$, $\tan(\theta) = \sqrt{8}$, $\cot(\theta) = 1/\sqrt{8}$, $\csc(\theta) = -3/\sqrt{8}$ y $\sec(\theta) = -3$.

Resultado

5 a) $\cos(15°) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

c) $\operatorname{sen}(5°)\cos(40°) + \cos(5°)\operatorname{sen}(40°) = \sqrt{2}/2$

e) $\dfrac{\tan(73°) - \tan(13°)}{1 + \tan(73°)\tan(13°)} = \sqrt{3}$

$\boxed{\text{Sección 6 y 3}}$

Material Docente Algebra Sección 6

Material Docente Cálculo sección 3

Material $\boxed{\text{Público}}$

$$f(x) = \frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

fcfm

Ingeniería Matemática

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE