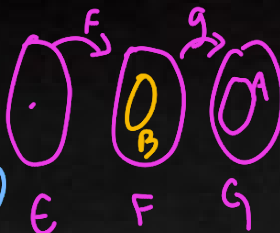




$$f: E \rightarrow F \text{ y } g: F \rightarrow G$$



$$a) A \subseteq G$$

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

$$\downarrow \uparrow$$

$$x \in (g \circ f)^{-1}(A) \Leftrightarrow (g \circ f)(x) \in A \quad \text{Def preimagen}$$

$$\Leftrightarrow g(f(x)) \in A \quad \text{Def Composición}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(A) \quad \text{Def preimagen}$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A)) \quad \text{Def preimagen}$$

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

$$h = g \circ f$$

$$h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$\subseteq \uparrow$$

$$f(x) \in g^{-1}(A)$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &\in A \\ h(x) &\in A \quad \text{Def} \\ x &\in h^{-1}(A) \\ x &\in f^{-1}(g^{-1}(A)) \\ f(x) &\in g^{-1}(A) \end{aligned}$$

Imagen

$$\exists x \in A, f(x) = g$$

Def imagen

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in A, f(x) \in B$$



$$[x \in (g \circ f)^{-1}(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A))] \wedge [x \in f^{-1}(g^{-1}(A)) \Rightarrow x \in (g \circ f)^{-1}(A)]$$

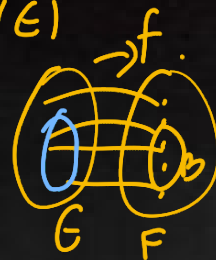
$$(g \circ f)^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(A)) \quad \wedge \quad f^{-1}(g^{-1}(A)) \subseteq (g \circ f)^{-1}(A)$$

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

Como x era arbitrario lo probamos $\forall x \in E$

b) $B \subseteq F$, pda $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$

Conjunto de todas las imágenes.



Sea $y \in f(f^{-1}(B))$ arbitrario

$\hookrightarrow \exists x \in f^{-1}(B)$, tq $f(x) = y$ $\downarrow$ Def Imagen

$\hookrightarrow f(x) \in B$ $\downarrow$ Def Preimagen

Imagen $\exists x \in A, f(x) = y$ $x \in E$.

Preimagen $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

$\hookrightarrow y \in B$

$\hookrightarrow y \in B \cap f(E)$

$\hookrightarrow y \in (B \cap f(E))$ como y arbitrario

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B \cap f(E)$$

$$B \cap f(E) \subseteq f(f^{-1}(B)) \Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E) //$$

Imagen / Preimagen

$$x^2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$$

$$f: A \rightarrow B \subseteq C$$

Rec Cod

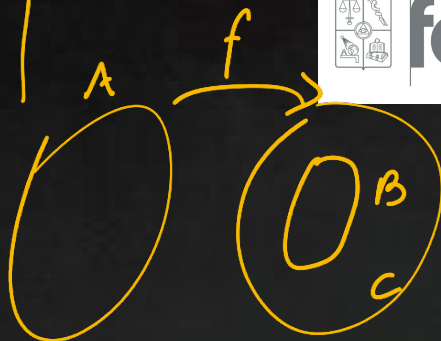
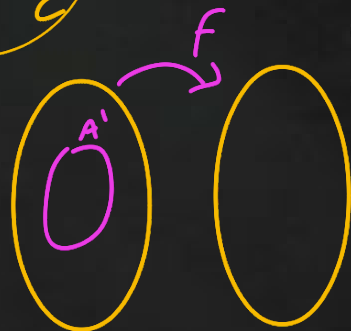


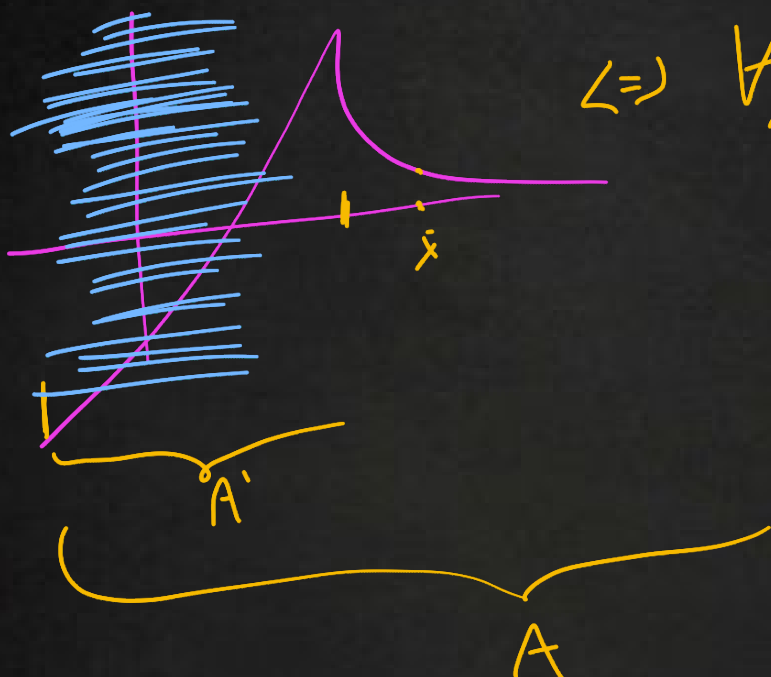
Imagen $f: A \rightarrow B$, $A' \subseteq A$

$$f(A') = \{ f(x) \in B, x \in A' \}$$

Formula, Prop



$$\Leftrightarrow \forall y \in B, (y \in f(A')) \Leftrightarrow (\exists x \in A', f(x) = y)$$



Preimagen $f: A \rightarrow B$, $B' \subseteq B$

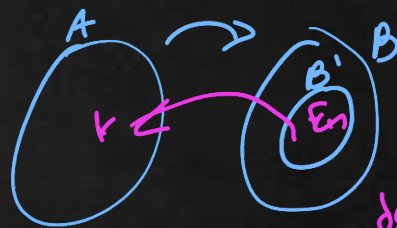
$$f^{-1}(B') = \{ x \in A : f(x) \in B' \}$$

Formula, Prop

$$\Leftrightarrow \forall x \in A, (x \in f^{-1}(B')) \Leftrightarrow (f(x) \in B')$$

El B' es llamado por el x

El x , generado al B'



$$x \in f^{-1}(B') \Leftrightarrow f(x) \in B'$$

Imagen

Preimagen

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2) \quad \bullet \quad B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \quad \bullet \quad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2) \quad \bullet \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

La preimagen se comporta bien

$$E \neq \emptyset, \quad f: P(E) \times P(E) \rightarrow P(E)$$

$$f(x, y) = x \setminus y = x \cap y^c$$

$(x, y) \rightarrow x \cap y^c$

PDA a) $f^{-1}(\{E, \emptyset\}) = \{(E, \emptyset)\} \cup \{(x, y) \in P(E) \times P(E), x \subseteq y\}$

Caso 1

$$f^{-1}(\{E, \emptyset\}) \supseteq \{(E, \emptyset)\} \cup \{(x, y) \in P(E) \times P(E), x \subseteq y\}$$

Caso 2.

$$f^{-1}(\{E, \emptyset\}) \subseteq \{(E, \emptyset)\} \cup \{(x, y) \in P(E) \times P(E), x \subseteq y\}$$

Caso 1

$$A \subseteq B \cup C$$

$$\forall x \in B \Rightarrow x \in C \quad \Leftrightarrow \quad B \subseteq C$$



Caso 1.1. Sea $SPG \quad (A, B) \in \{(E, \emptyset)\} \Rightarrow (A, B) \in f^{-1}(\{E, \emptyset\})$

$$(A, B) = (E, \emptyset) \Leftrightarrow A = E \wedge B = \emptyset$$

$$f(A, B) = A \setminus B$$

$$= E \setminus \emptyset = E \cap \emptyset^c = E \cap E = E //$$

$$f(A, B) = E \Leftrightarrow (A, B) \in f^{-1}(\{E\})$$

$\xrightarrow{\text{Def pt e imagen}}$

$$\{E\} \subseteq \{E, \emptyset\} \Rightarrow (A, B) \in f^{-1}(\{E\}) \subseteq f^{-1}(\{E, \emptyset\})$$

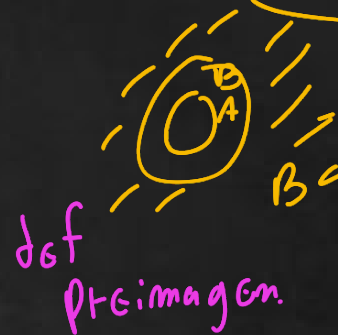
$$\Rightarrow (A, B) \in f^{-1}(\{E, \emptyset\})$$

Caso 1.2. $(A, B) \in \underbrace{\{(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq Y\}}_{\text{Forma Prop}} \Rightarrow (A, B) \in f^{-1}(\{E, \emptyset\})$

$$A \subseteq B, \quad f(A, B) = A \cap B = A \cap B^c = \emptyset$$

$$\hookrightarrow f(A, B) = \emptyset$$

$$(A, B) \in f^{-1}(\{\emptyset\})$$



$\downarrow$ Def pt e imagen.

$$\{\emptyset\} \subseteq \{E, \emptyset\} \Rightarrow (A, B) \in f^{-1}(\{\emptyset\}) \subseteq f^{-1}(\{E, \emptyset\})$$

$$\therefore (A, B) \in f^{-1}(\{E, \emptyset\})$$

Caso 1 ✓

Caso 2. $f^{-1}(\{E, \emptyset\}) \subseteq \{(E, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq Y\}$

$$A \subseteq B \quad \cup \subseteq$$

$$1) A \subseteq B \subseteq B \cup C$$

$$2) A \subseteq C \subseteq B \cup C$$

$$\text{Sea } (A, B) \in f^{-1}(\{E, \emptyset\})$$

$$\Rightarrow (A, B) \in \{(E, \emptyset)\} \cup \{ \text{_____} \}$$

$$(A, B) \in f^{-1}(\{E, \emptyset\}) \quad \downarrow \quad \text{✗}$$

$$f(A, B) = E \quad \wedge \quad f(A, B) = \emptyset$$

Caso 2.1

Caso 2.2

$$\text{Caso 2.1} \quad f(A, B) = E$$

$$A \cap B^c = E$$

$$A = E \quad \wedge \quad B^c = E \Rightarrow A = E \quad \wedge \quad B = \emptyset$$

$$(A, B) = (E, \emptyset) \in \{(E, \emptyset)\} \subseteq \{(E, \emptyset)\} \cup \{ \text{_____} \}$$

$$\text{Caso 2.2} \quad f(A, B) = \emptyset$$

$$A \cap B^c = \emptyset \Rightarrow \underline{A \subseteq B}$$

$$\underline{(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)},$$

$$(A, B) \in f^{-1}(\{E, \emptyset\}) \Rightarrow (A, B) \in \{ \text{_____} \} \subseteq \{(E, \emptyset)\} \cup \{ \text{_____} \}$$

$$\Rightarrow \forall (A, B) \in f^{-1}(\{E, \emptyset\})$$

$$\Rightarrow (A, B) \in \{(E, \emptyset)\} \cup \{ \text{_____} \}.$$

Entonces

$$f^{-1}(\{E, \emptyset\}) = \{(E, \emptyset)\} \cup \{(x, y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), x \subseteq y\}$$



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$F: P(E) \times P(E) \rightarrow P(E)$$

$$F(x, y) = x \setminus y = x \cap y^c$$



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$a) F^{-1}(\{E, \emptyset\}) = \{(E, \emptyset)\} \cup \{(x, y) \in P(E) \times P(E), x = y\}$$

$$b) D = \{(x, x), x \in P(E)\}$$

$$D \text{ determina } F(D)$$

$$z \in D \Leftrightarrow \exists (x, y) \in D, z = F(x, y)$$

$$F(D) = x \setminus y, z \in D \Leftrightarrow (x, y) \in D$$

$$x = y$$

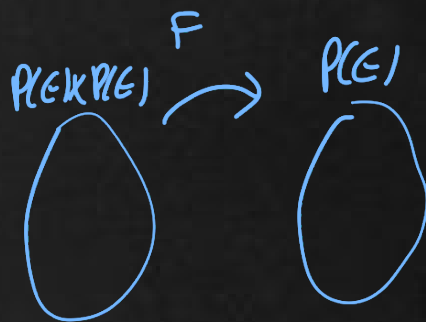
$$= x \setminus x$$

$$F(x, x) = \emptyset, x, y \text{ elem arbitrarios}$$

$$S: z \in F(D)$$

$$\Leftrightarrow z \in \{\emptyset\} \Leftrightarrow F(D) = \{\emptyset\}$$

c) Probar que es sobreyectiva F



Sea $z \in P(E)$ arbitrario

debo probar que existe $(x, y) \in P(E) \times P(E)$

$$\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y$$

$$!g \quad F(x, y) = z \quad F(x, y) = \boxed{x \cap y^c = z}$$

$$x = z \wedge y^c = E \quad z \cap E \nearrow$$

$$x = z, y = \emptyset$$

Bueno Busco $(x, y) \in P(E) \times P(E)$

$$\text{dado } x = z \wedge y = \emptyset$$

$$\text{entonces } F(x, y)$$

$$= x \cap y^c$$

$$= z \cap \emptyset^c = z$$

$$\therefore \exists (x, y) \in P(E) \times P(E) \text{ tal que } F(x, y) = z \in P(E)$$

Como z arbitrario subyectiva.

$$d) \text{ Inyectiva? } F(x) = F(y) \Rightarrow x = y$$

$$F(A, A) = \emptyset, A \neq B$$

$$F(B, B) = \emptyset$$

$\Rightarrow$ No inyectiva

En efecto por parte b) $F(\emptyset) = \emptyset$

$$\text{luego } \forall x \in P(E), F(x, x) = \emptyset$$

s: tomo x_1, x_2 distintos

$$F(x_1, x_1) = \emptyset = F(x_2, x_2)$$

Pero $x_1 \neq x_2 \therefore$ No es inyectiva



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE