# 8. Semana 7

**P1** **(a)** La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $x \in A$, dada la propiedad de $f$ si se toma $k = n$ se tiene que $f^{(n)}(x) = x \Leftrightarrow xRx$.
- Simétrica: Sean $x, y \in A$, como $xRy$ existe un $k_1$ tal que $f^{(k)}(x) = y$, luego componiendo la funcion $n-k$ veces se tiene que $f^{(n-k+k)}(x) = x = f^{(n-k)}(y) \Leftrightarrow yRx$.
- Transitiva: Sean $x, y, z \in A$, como $xRy$ existe un $k$ tal que $f^{(k_1)}(x) = y$, y también como $yRz$ existe un $k_2$ tal que $f^{(k_2)}(y) = z$, si $f^{(k_1)}(x) = y$ se compone $k_2$ veces se obtiene $f^{(k_1+k_2)}(x) = f^{(k_2)}(y) = z \Leftrightarrow xRz$ existe la posibilidad que $2n > k_1+k_2 > n$ en ese caso en vez de tomar $k_1 + k_2$ se toma $k_1 + k_2 - n$, en donde claramente $k_1 + k_2 - n < n$ y además $f^{(k_1+k_2)}(x) = f^{(n)} \circ f^{(k_1+k_2-n)}(x) = f^{(k_1+k_2-n)}(x) = z$.

Luego la relación es de equivalencia.

**(b)** **b.1** Para $n = 3$ se tiene $f^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = f^{(2)}(x_2, x_3, x_1) = f(x_3, x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_3)$

**b.2**
$$
\begin{aligned}
&[(0,0,0)]_A = \{(x,y,z) \in \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \ \mid \ (0,0,0)R(x,y,z)\} = \{(0,0,0)\}\\
&[(1,1,1)]_A = \{(x,y,z) \in A \ \mid \ (1,1,1)R(x,y,z)\} = \{(1,1,1)\}\\
&[(1,0,0)]_A = \{(x,y,z) \in A \ \mid \ (1,0,0)R(x,y,z)\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\\
&[(1,1,0)]_A = \{(x,y,z) \in A \ \mid \ (1,1,0)R(x,y,z)\} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}
\end{aligned}
$$

**P2** **(a)** La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $X \in P(E)$, claramente $A \cap X = A \cap X \Leftrightarrow X\mathcal{R}X$.
- Simétrica: Sean $X, Y \in P(E)$, como $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y \Leftrightarrow A \cap Y = A \cap X \Leftrightarrow Y\mathcal{R}X$.
- Transitiva: Sean $X, Y, Z \in P(E)$, como $X\mathcal{R}Y$ y $Y\mathcal{R}Z$ se tiene que $A \cap X = A \cap Y = A \cap Z \Rightarrow A \cap X = A \cap Z \Leftrightarrow X\mathcal{R}Z$.

Luego la relación es de equivalencia.

**(b)** Primero demostraremos que $\{[X]/X \in P(A)\} \subseteq P(E)/\mathcal{R}$, es claro que $A \subseteq E$ luego $P(A) \subseteq P(E)$ y con esto $\{[X]/X \in P(A)\} \subseteq P(E)/\mathcal{R}$, para la otra inclusión tomamos un $C \in P(E)/\mathcal{R}$ esto quiere decir que $C = [M]$ con $M \in P(E)$, si tomamos un conjunto $X = A \cap M$, se puede ver que $X\mathcal{R}M$, en efecto

$$
\begin{aligned}
& X = A \cap M \qquad \text{\textbackslash intersectando con } A\\
& A \cap X = A \cap A \cap M\\
& A \cap X = A \cap M\\
\Leftrightarrow\ & X\mathcal{R}M
\end{aligned}
$$

Pero como $X \subseteq A$ ($A \cap M \subseteq A$), quiere decir que $X \in P(A)$, además dado $X\mathcal{R}M$ significa que $C = [M] = [X]$ con $C \in \{[X]/X \in P(A)\}$.

**(c)** Por contrarecíproca, como $[X] = [Y]$ esto quiere decir que $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$, pero además $X, Y \in P(A)$, luego $X \subseteq A$ e $Y \subseteq A$, lo que significa que $X = A \cap X$ y que $Y = A \cap Y$, juntando ambas ecuaciones resulta que $X = Y$.

**P3** **(a)** La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $(a_1, a_2) \in A$, tomando $k = 0$, es lo mismo que $2 \cdot 0 = a_1 + a_2 - a_1 - a_2 \Leftrightarrow (a_1, a_2)\mathcal{R}(a_1, a_2)$.
- Simétrica: Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A$, como $(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$, reordenando la expresión: $a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k \Leftrightarrow -(b_1 + b_2 - a_1 - a_2) = 2k \Leftrightarrow b_1 + b_2 - a_1 - a_2 = 2(-k)$, llamando $k' = -k$, que claramente es entero, tenemos que $b_1 + b_2 - a_1 - a_2 = 2k' \Leftrightarrow (b_1, b_2)\mathcal{R}(a_1, a_2)$.
- Transitiva: Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in A$ como $(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k$ y $(b_1, b_2)\mathcal{R}(c_1, c_2) \Leftrightarrow b_1 + b_2 - c_1 - c_2 = 2j$ con $k, j \in \mathbb{Z}$ Sumando ambas expresiones tenemos como resultado $a_1 + a_2 - b_1 - b_2 + b_1 + b_2 - c_1 - c_2 = a_1 + a_2 - c_1 - c_2 = 2(k + j)$ llamando $m = k + j$ que claramente es entero porque la suma en $\mathbb{Z}$ es cerrada, se tiene que $a_1 + a_2 - c_1 - c_2 = 2m \Leftrightarrow (a_1, a_2)\mathcal{R}(c_1, c_2)$.

Luego la relación es de equivalencia.

**(b)**

$$[(0,0)]_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ (0,0)\mathcal{R}(x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ x + y = -2k\}$$

Este conjunto son los pares ordenados de números tales que la suma de sus componentes es par, esto solamente se puede dar si tenemos: (par,par) o (impar, impar), (números de igual paridad).

$$[(1,0)]_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ (1,0)\mathcal{R}(x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ x + y = -2k + 1\}$$

Este conjunto son los pares ordenados de números tales que la suma de sus componentes es impar, esto solamente se puede dar si tenemos: (par,impar) o (impar, par), (números de distinta paridad).

**(c)** Es claro que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}} \subseteq A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (los pares ordenados fueron sacados de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$), falta demostrar la otra inclusión: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq [(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}}$ En efecto, sea $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dicho par ordenado puede tener algunas de estas 4 combinaciones posibles:

- (par,par), en este caso pertenece a $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$
- (impar,impar), en este caso pertenece a $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$
- (impar,par), en este caso pertenece a $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$
- (par,impar), en este caso pertenece a $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$

Luego con esto se ha probado la inclusión que faltaba, se concluye que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

**(d)** Lo que se pide encontrar acá es una función tal que lleve los números $(x, y)$ de distinta paridad a tener la misma paridad, entendiendo esto, bastaría una función $f : [(1,0)]_{\mathcal{R}} \to [(0,0)]_{\mathcal{R}}$ tal que $(x, y) \to f(x, y) = (x+1, y)$, por ejemplo, si tomamos el par $(3, 8)$ que está en $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$, al aplicarle la función quedaría $(3+1, 8) = (4, 8)$ que ahora pertenece a $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$, esta función es biyectiva, es de 2 variables, pero la pueden ver como dos funciones por separado $f_1(x) = x+1$ y $f_2(y) = y$ esto es debido a que las componentes de los pares ordenados son independientes entre sí, claramente $f_1$ y $f_2$ son biyectivas, luego $f$ es biyectiva.

**P4** **(a)** La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $x \in Q_+$, tomando $\alpha = 0$ se tiene que $p^\alpha = 1 = \frac{x}{x} \Leftrightarrow x\Omega_p x$.
- Simétrica: Sean $x, y \in Q_+$ como $x\Omega_p y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = p^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{Z}$ reordenando se tiene $\frac{y}{x} = p^{-\alpha}$, luego eligiendo $\beta = -\alpha$ que claramente pertenece a $\mathbb{Z}$, se tiene que $\frac{y}{x} = p^\beta \Leftrightarrow y\Omega_p x$.
- Transitiva: Sean $x, y, z \in Q_+$ como $x\Omega_p y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = p^\alpha$ e $y\Omega_p z \Leftrightarrow \frac{y}{z} = p^\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ , multiplicando ambas expresiones se tiene que $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = p^{(\alpha+\beta)}$, eligiendo $\gamma = \alpha + \beta$ que claramente pertenece a $\mathbb{Z}$ porque la suma en $\mathbb{Z}$ es cerrada, se tiene que $\frac{x}{z} = p^\gamma \Leftrightarrow x\Omega_p z$.

Luego la relación es de equivalencia.

**(b)**

$$[1]_{\Omega_2} = \{x \in Q_+ \ | \ 1\Omega_2 x\} = \{x \in Q_+ \ | \ x = 2^{-\alpha}\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., 2, 4, 8...\right\}$$

**P5** **(a)**

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{m} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=n}^{m} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=n}^{m} [\log(k+1) - \log(k)] \qquad \backslash\text{telescópica} \\ &= \log(m+1) - \log(n) \end{aligned}$$