

Resumen Principio de Inducción

- **[Principio de inducción]:** Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y $P(n)$ una función proposicional, se tiene que la proposición:

$$\forall n \geq n_0, P(n) \quad (1)$$

Es equivalente a:

$$\underbrace{P(n_0)}_{\text{Caso base}} \wedge [\forall n \geq n_0, \underbrace{P(n)}_{\text{H.I. (débil)}} \Rightarrow P(n+1)]$$

Observación: Este tipo de inducción también es conocida como inducción débil.

- **[Principio de inducción Fuerte]:** También tenemos que la proposición (1) es equivalente a:

$$\underbrace{P(n_0)}_{\text{Caso base}} \wedge [\forall n \geq n_0, \underbrace{P(n_0) \wedge \dots \wedge P(n)}_{\text{H.I. (fuerte)}} \Rightarrow P(n+1)]$$

Esta inducción es llamada inducción fuerte pues ocupa completamente la hipótesis inductiva.

Resumen Conjuntos

- **[Nociones básicas]:**

- **Conjunto Referencia:** Es el conjunto al cual pertenecen todos los elementos con los que se va a trabajar. Si denotamos E al conjunto de referencia, tenemos que $x \in E$ es siempre verdad.
- **Conjunto vacío:** Se define el conjunto $\emptyset$ como el conjunto que no posee elementos, es decir $x \in \emptyset$ es siempre falso.

- **[Definiciones Básicas]:** Sean A y B conjuntos, se define:

- **Igualdad:**
 $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
- **Inclusión:**
 $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B)$
- **Unión:**
 $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
- **Intersección:**
 $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
- **Complemento:**
 $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$
- **Diferencia:**
 $A \setminus B := A \cap B^c$
- **Diferencia simétrica:**
 $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- **[Propiedades de inclusión]:** Sean $A, B, C, D \subseteq E$ conjuntos:

- $\emptyset \subseteq A \subseteq E$
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
- Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$ entonces $A \cap B \subseteq C \cap D$ y $A \cup B \subseteq C \cup D$

- **[Propiedades de igualdad]:** Sean $A, B \subseteq E$ conjuntos:

- $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup E = E, \quad A \cap E = A$
- $(A^c)^c = A, \quad A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = E$
- Ley de De Morgan**

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

- **[Equivalencias útiles]:** Son equivalentes:

- $A \subseteq B$
- $B^c \subseteq A^c$
- $A \cap B^c = \emptyset$
- $B \cup A^c = E$

Resumen Funciones

- **[Producto Cartesiano]**: Para $A \subseteq E$ y $B \subseteq F$ se define el conjunto $A \times B$ como: $A \times B := \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$

- **[Algunas propiedades]**: Si $A_1, A_2 \subseteq E$ y $B_1, B_2 \subseteq F$ entonces:

1. $A_1 \times \emptyset = \emptyset \times B_1 = \emptyset$
2. $A_1 \subseteq A_2$ y $B_1 \subseteq B_2 \implies A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$
3. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$
4. $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$

- **[Conjunto potencia]**: Se define el conjunto potencia (o tambien llamado conjunto de las partes) $\mathcal{P}(A)$ al conjunto de todos los subconjuntos de A :

$$\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq E | X \subseteq A\}$$

Obs. : $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$ siempre.

- **[Unión e intersección de Conjuntos potencia]**:

1. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
2. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

- **[Igualdad de Funciones]**: Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$ son funciones, entonces

$$f = g \iff \text{Dom } f = \text{Dom } g \wedge \text{Cod } f = \text{Cod } g \wedge \forall x \in \text{Dom } f, f(x) = g(x)$$

Obs. : Esta definición de igualdad nos dice básicamente que ambas 3-tuplas son iguales: $(A, B, G_f) = (C, D, G_g)$

- **[Inyectividad]**: Diremos que una función $f : A \rightarrow B$ es inyectiva si:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

- **[Partición de conjuntos]**: Llamaremos a $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(A)$ partición de A si se cumple:

- $\forall C \in \mathcal{C}, C \neq \emptyset$
- $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ si $C_1 \neq C_2$, entonces $C_1 \cap C_2 = \emptyset$
- $\mathcal{C}$ cubre A : $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$

- **[Definición Función]**: Una función de A a B ($f : A \longrightarrow B$) es una 3-tupla $f = (A, B, G)$ que satisfice:

- $G \subseteq A \times B$
- $\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in G$

Obs. : Para clarificar conceptos:

- Podemos escribir $b = f(a)$ pues b -dado a - posee un unico valor.
- $G = \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\} = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$
- A es llamado dominio de f ($\text{Dom } f$) y B codominio de f ($\text{Cod } f$).

- **[Epiyectividad]**: Diremos que una función $f : A \rightarrow B$ es epiyectiva si:

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$$