



7. Semana 6

P1 Por definición de conjunto preimagen

$$g^{-1}(\mathbb{Z}) = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{Z} \right\} = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

$$(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z}) = \left\{ x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \frac{1}{4x} \in \mathbb{Z} \right\} = \emptyset$$

P2 Sea $y \in f(A) \setminus f(B)$ esto significa por definición que

$$\begin{aligned} y &\in f(A) \setminus f(B) \\ \Leftrightarrow y &\in (f(A) \cap f(B)^c) \\ \Leftrightarrow y &\in f(A) \wedge y \in f(B)^c \\ \Leftrightarrow (\exists x \in A)(f(x) = y) &\wedge (\forall x \in B)(f(x) \neq y) \end{aligned}$$

Esto último quiere decir que $(\exists x \in A \setminus B)(f(x) = y)$ ya que si x estuviera en B contradice que $(\forall x \in B)(f(x) \neq y)$. Con lo anterior se deduce que $y \in f(A \setminus B)$ y con esto $y \in f(A) \setminus f(B) \Rightarrow y \in f(A \setminus B)$, $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$, de manera análoga $f(B) \setminus f(A) \subseteq f(B \setminus A)$, finalmente uniendo ambas expresiones y recordando que $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(A) \setminus f(B) \cup f(B) \setminus f(A) &\subseteq f(A \setminus B) \cup f(B \setminus A) \\ f(A) \triangle f(B) &\subseteq f((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \\ f(A) \triangle f(B) &\subseteq f(A \triangle B) \end{aligned}$$

Si es inyectiva, bastaría probar que $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$, en efecto, sea $y \in f(A \setminus B)$ entonces existe un x en $A \setminus B$ tal que $f(x) = y$, por tanto, $y \in f(A)$, no puede haber otro $\bar{x} \in B$ tal que $f(\bar{x}) = y$ ya que de ser así no sería inyectivo, luego $y \notin f(B)$ y se concluye que $y \in f(A \setminus B) \Rightarrow y \in f(A) \setminus f(B)$, $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$ de manera análoga $f(B \setminus A) \subseteq f(B) \setminus f(A)$. Dicho esto, se tiene $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$ y $f(B \setminus A) \subseteq f(B) \setminus f(A)$, uniendo ambas expresiones se tiene que

$$\begin{aligned} f(A \setminus B) \cup f(B \setminus A) &\subseteq f(A) \setminus f(B) \cup f(B) \setminus f(A) \\ f((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) &\subseteq f(A) \triangle f(B) \\ f(A \triangle B) &\subseteq f(A) \triangle f(B) \end{aligned}$$

Con esto y usando la parte anterior se tiene que $f(A) \triangle f(B) = f(A \triangle B)$.

P3 Recordando que $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$

$$\begin{aligned} f(B) \setminus f(A) &= \emptyset \\ f(B) \cap f(A)^c &= \emptyset \quad \setminus \cup f(A) \\ (f(B) \cup f(A)) \cap (f(A)^c \cup f(A)) &= \emptyset \cup f(A) \\ (f(B) \cup f(A)) \cap U &= f(A) \\ f(B) \cup f(A) &= f(A) \\ f(B \cup A) &= f(A) \end{aligned}$$



P4 (a) La relación es de orden si es refleja, antisimétrica y transitiva

- Refleja: Sea $p \in \mathcal{P}$ se sabe que $(p \Leftrightarrow (p \wedge p)) \Leftrightarrow p\mathcal{R}p$.
- Antisimétrica: Sean $p, q \in \mathcal{P}$ Como $p\mathcal{R}q \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Leftrightarrow q)$, además $q\mathcal{R}p \Leftrightarrow ((q \wedge p) \Leftrightarrow p)$, juntando ambas expresiones se tiene que $p \Leftrightarrow (q \wedge p) \Leftrightarrow q$, luego $p \Leftrightarrow q$ y por definición $p = q$.
- Transitiva: Sean $p, q, r \in \mathcal{P}$ tales que $p\mathcal{R}q$ y $q\mathcal{R}r$, se tiene que $(q \wedge r) \Leftrightarrow r$, pero como $q \Leftrightarrow (p \wedge q)$, significa que $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow r$, lo que lleva a $(p \wedge r) \Leftrightarrow r \Leftrightarrow p\mathcal{R}r$.

Luego la relación es de orden.

(b) Si es de orden total se debe cumplir que $p\mathcal{R}q \vee q\mathcal{R}p$

$$\begin{aligned}
 & p\mathcal{R}q \vee q\mathcal{R}p \\
 & \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow q] \vee [(q \wedge p) \Leftrightarrow p] \\
 & \Leftrightarrow [((p \wedge q) \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow (p \wedge q))] \vee [((q \wedge p) \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow (q \wedge p))] \\
 & \Leftrightarrow [q \Rightarrow (p \wedge q)] \vee [p \Rightarrow (q \wedge p)] \\
 & \Leftrightarrow \bar{q} \vee (p \wedge q) \vee \bar{p} \vee (q \wedge p) \\
 & \Leftrightarrow \bar{q} \vee \bar{p} \vee (p \wedge q) \\
 & \Leftrightarrow \overline{(q \wedge p)} \vee (p \wedge q) \\
 & \Leftrightarrow V
 \end{aligned}$$

P5 La relación es de orden si es refleja, antisimétrica y transitiva

- Refleja: Claramente $(\forall x, y \in \mathbb{R})(xR_1y \Rightarrow xR_1y) \Leftrightarrow R_1\Omega R_1$.
- Antisimétrica: Sean $R_1, R_2 \in A$

$$\begin{aligned}
 & R_1\Omega R_2 \wedge R_2\Omega R_1 \\
 & \Leftrightarrow (\forall x, y \in \mathbb{R})(xR_1y \Rightarrow xR_2y) \wedge (\forall x, y \in \mathbb{R})(xR_2y \Rightarrow xR_1y) \\
 & \Leftrightarrow (\forall x, y \in \mathbb{R})[(xR_1y \Rightarrow xR_2y) \wedge (xR_2y \Rightarrow xR_1y)] \\
 & \Leftrightarrow (\forall x, y \in \mathbb{R})[(xR_1y \Leftrightarrow xR_2y)] \\
 & \Leftrightarrow R_1 = R_2
 \end{aligned}$$

- Transitiva: Sean $R_1, R_2, R_3 \in A$

$$\begin{aligned}
 & R_1\Omega R_2 \wedge R_2\Omega R_3 \\
 & \Leftrightarrow (\forall x, y \in \mathbb{R})(xR_1y \Rightarrow xR_2y) \wedge (\forall x, y \in \mathbb{R})(xR_2y \Rightarrow xR_3y) \\
 & \Leftrightarrow (\forall x, y \in \mathbb{R})[(xR_1y \Rightarrow xR_2y) \wedge (xR_2y \Rightarrow xR_3y)] \\
 & \Rightarrow (\forall x, y \in \mathbb{R})[(xR_1y \Rightarrow xR_3y)] \quad \backslash \text{transitividad en proposiciones} \\
 & \Leftrightarrow R_1\Omega R_3
 \end{aligned}$$



Luego la relación es de orden, para ver si es parcial, entonces hay que encontrar 2 relaciones $R_1, R_2 \in A$ tales que $R_1 \not\Omega R_2 \wedge R_2 \not\Omega R_1$, pensemos por ejemplo xR_1y : si x e y dividen a 6 y xR_2y : si 6 divide a x e y , podemos ver entonces que $R_1 \not\Omega R_2$, basta tomar $x = 2$ e $y = 3$, y también $R_2 \not\Omega R_1$, basta tomar $x = 18$ e $y = 24$, luego la relación es de orden parcial.

Capítulo 3

Funciones

3.1. Problemas resueltos.

P1) Sean $f : E \rightarrow F$ y $g : F \rightarrow G$ funciones (no necesariamente biyectivas)

1. Sea $A \subseteq G$. Probar que $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.
2. Sea $B \subseteq F$. Probar que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

Solución:

1. Como $f : E \rightarrow F$ y $g : F \rightarrow G$, entonces $g \circ f : E \rightarrow G$. Luego como $A \subseteq G$, $(g \circ f)^{-1}(A) = \{x \in E | g \circ f(x) \in A\}$ está bien definida. Sea $x \in E$, entonces:

$$\begin{aligned}x \in (g \circ f)^{-1}(A) &\Leftrightarrow g \circ f(x) \in A \\&\Leftrightarrow g(f(x)) \in A \\&\Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(A) \\&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A))\end{aligned}$$

Por lo tanto dado que la propiedad es cierta en todo x , $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

2. Por demostrar que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$. Probaremos cada inclusión por separado.
($\subseteq$)
Notemos primero que como $f^{-1}(B) \subseteq E$, entonces $f(f^{-1}(B)) \subseteq f(E)$. Luego sólo falta verificar que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$:

Sea $x \in f(f^{-1}(B))$, entonces $x = f(y)$ para cierto $y \in f^{-1}(B)$. Pero

$$y \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(y) \in B,$$

y como $x = f(y)$, tenemos que $x \in B$. Por lo tanto $f(f^{-1}(B)) \subseteq B \cap f(E)$.

($\supseteq$)

Sea $x \in f(E) \cap B$, entonces

$$\begin{aligned} x \in f(E) \cap B &\Leftrightarrow x \in f(E) \wedge x \in B \\ &\Leftrightarrow \exists y \in E \text{ tal que } x = f(y) \wedge x \in B \\ &\Rightarrow f(y) \in B \\ &\Rightarrow y \in f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que $x = f(y) \wedge y \in f^{-1}(B)$, por lo tanto $x \in f(f^{-1}(B))$. Como esto es cierto en cada x , concluimos la inclusión deseada.

□

P2) Sea $f : E \rightarrow F$ una función.

1. Pruebe que $\forall A \subseteq F, f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.
2. Pruebe que $\forall A \subseteq F, \forall B \subseteq F, f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$.

Solución:

1. Sea $A \subseteq F$, entonces

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A^c) &\Leftrightarrow f(x) \in A^c \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin A \\ &\Leftrightarrow \overline{f(x) \in A} \\ &\Leftrightarrow \overline{x \in f^{-1}(A)} \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \\ &\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(A))^c \end{aligned}$$

Por lo tanto, como lo anterior es cierto en todo x , $\forall A \subseteq F, f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

2. Sean $A, B \subseteq F$, entonces

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B) &\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)) \cap (f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B))^c \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A \cup B) \cap (f^{-1}(A \cap B))^c && (\text{prop. preimagen}) \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A \cup B) \cap (f^{-1}((A \cap B)^c)) && (\text{parte (a)}) \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) && (\text{prop. preimagen}) \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A \Delta B)
\end{aligned}$$

De donde concluimos la igualdad deseada.

□

P3) 1. Sea $f : E \rightarrow F$ una función y A, B subconjuntos de E . Pruebe que

$$f(B) \setminus f(A) = \emptyset \Rightarrow f(A \cup B) = f(A).$$

2. Sea $f : E \rightarrow F$ una función que satisface la propiedad

$$\forall A, B \subseteq E, (A \subseteq B \wedge A \neq B) \Rightarrow f(A) \neq f(B).$$

Probar que f es inyectiva.

Solución

1. Suponemos que $f(B) \setminus f(A) = \emptyset$, luego

$$\begin{aligned}
f(B) \setminus f(A) = \emptyset &\Rightarrow f(B) \cap f(A)^c = \emptyset \\
&\Rightarrow f(B) \subseteq f(A) \\
&\Rightarrow f(A) \cup f(B) = f(A) \\
&\Rightarrow f(A \cup B) = f(A)
\end{aligned}$$

2. Sean $x_1, x_2 \in E$ distintos y definamos los subconjuntos de E :

$$A = \{x_1\} \text{ y } B = \{x_1, x_2\} \Rightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

Entonces por hipótesis, tenemos que

$$f(A) \neq f(B) \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(\{x_1, x_2\}) \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_1) \cup f(x_2)$$

lo que implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$ (pues $f(x_1) \cup f(x_1) = f(x_1)$). Es decir, si tenemos $x_1, x_2 \in E$ distintos, sus imágenes por f son distintas también, por lo tanto f es inyectiva.

□

- P4) 1. Considere las funciones $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida en cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ por $f(n) = \frac{1}{2n}$ y $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida en cada $q \in \mathbb{Q}$ por $g(q) = \frac{q}{2}$.
- Determine si f , g y $g \circ f$ son inyectivas, epiyectivas y biyectivas.
 - Determine los conjuntos preimágenes $g^{-1}(\mathbb{Z})$ y $(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z})$.
2. Sea $E = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva} \}$. Es decir E contiene a todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\psi : E \rightarrow E$ tal que para cada $f \in E$, $\psi(f) = f^{-1}$, es decir ψ le asocia a cada función en E su inversa.
- Probar que ψ es biyectiva.
 - Sean $f, g \in E$. Probar que $\psi(f \circ g) = \psi(g) \circ \psi(f)$.

Solución:1. a) **inyectividad:**

- para f : sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tales que $f(n_1) = f(n_2)$, luego

$$f(n_1) = f(n_2) \Leftrightarrow \frac{1}{2n_1} = \frac{1}{2n_2}$$

$$\Leftrightarrow 2n_2 = 2n_1$$

$$\Leftrightarrow n_1 = n_2$$

$$\Rightarrow f \text{ es inyectiva.}$$

- para g : sean q_1, q_2 tales que $g(q_1) = g(q_2)$, entonces

$$g(q_1) = g(q_2) \Leftrightarrow \frac{q_1}{2} = \frac{q_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow q_1 = q_2$$

$$\Rightarrow g \text{ es inyectiva.}$$

- para $g \circ f$: primero notemos que $g \circ f$ está bien definida, pues $\text{Rec}(f) = \text{Dom}(g) = \mathbb{Q}$. Además, como $g \circ f$ es composición de dos funciones inyectivas, entonces es inyectiva.

sobreyectividad:

- para f : tenemos que $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$, sea $q \in \mathbb{Q}$ tenemos que ver si existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $f(n) = q$, es decir, tal que $\frac{1}{2n} = q$. Pero es directo que $q = 0$ no tiene preimagen, pues no existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\frac{1}{2n} = 0$. Por lo tanto f no es sobreyectiva. Notar que además del 0 hay muchos racionales que no tienen preimagen, pues en general $\frac{1}{2q} \notin \mathbb{N} \setminus \{0\}$ cuando $q \in \mathbb{Q}$.

- para g : sea $q \in \mathbb{Q}$ tenemos que ver si existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $g(r) = q$, es decir, $\frac{r}{2} = q$. Si $q \in \mathbb{Q}$, entonces $2q \in \mathbb{Q}$, por lo tanto para $q \in \mathbb{Q}$ su preimagen es $2q$, con lo que concluimos que g es sobreyectiva.
- para $g \circ f$: sea $q \in \mathbb{Q}$, veamos si existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $g \circ f(n) = q$. Se tiene,

$$g \circ f(n) = q \Leftrightarrow g(f(n)) = q$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{2n}\right) = q$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4n} = q$$

Igual que en el caso de f , vemos que $q = 0$ no tiene preimagen. Por lo tanto $g \circ f$ no es sobreyectiva.

- b) • conjunto preimagen de $g^{-1}(\mathbb{Z})$

$$g^{-1}(\mathbb{Z}) = \{q \in \mathbb{Q} \mid g(q) \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{q \in \mathbb{Q} \mid \frac{q}{2} \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \wedge \frac{a}{2b} \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \wedge a = 2bk \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$$

- conjunto preimagen de $(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z})$

$$(g \circ f)^{-1}(\mathbb{Z}) = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid (g \circ f)(n) \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \frac{1}{4n} \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \emptyset$$

pues $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \frac{1}{4n} \in (0, \frac{1}{4}]$ y $(0, \frac{1}{4}] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

2. a) Veamos que ψ es biyectiva

inyectividad: sean $f, g \in E$ tal que $\psi(f) = \psi(g)$, es decir $f^{-1} = g^{-1}$, luego $f = g$.
En efecto:

$$f^{-1} = g^{-1} \Rightarrow f^{-1} \circ g = g^{-1} \circ g$$

$$\Rightarrow f^{-1} \circ g = id \quad (g \text{ es biyectiva})$$

$$\Rightarrow f \circ (f^{-1} \circ g) = f \circ id$$

$$\Rightarrow g = f \quad (\text{asociatividad de } \circ)$$

Por lo tanto ψ es inyectiva.

sobreyectividad: sea $f \in E$, veamos que existe $g \in E$ tal que $\psi(g) = f$, es decir $g^{-1} = f$.

Para esto basta tomar $g = f^{-1}$, ya que $(f^{-1})^{-1} = f$ (recordar que f^{-1} existe, pues f es biyectiva).

b) Sean $f, g \in E$. Veamos que $\psi(f \circ g) = \psi(g) \circ \psi(f)$.

$$\begin{aligned}\psi(f \circ g) &= (f \circ g)^{-1} \\ &= g^{-1} \circ f^{-1} \quad (\text{problema 1}) \\ &= \psi(g) \circ \psi(f)\end{aligned}$$

□

P5) Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : A' \rightarrow B'$ dos funciones biyectivas. Definimos

$$\mathcal{F}_{A,A'} = \{h : A \rightarrow A' \mid h \text{ es una función}\} \text{ y } \mathcal{F}_{B,B'} = \{\bar{h} : B \rightarrow B' \mid \bar{h} \text{ es una función}\}.$$

Considere además la función $\psi : \mathcal{F}_{A,A'} \rightarrow \mathcal{F}_{B,B'}$ tal que a cada $h \in \mathcal{F}_{A,A'}$ le asocia la función $\psi(h) = g \circ h \circ f^{-1}$.

1. Probar que ψ es una biyección.
2. Probar que h es inyectiva si y sólo si $\psi(h)$ es inyectiva.
3. Probar que h es sobreyectiva si y sólo si $\psi(h)$ es sobreyectiva.

Solución:

1. **inyectividad:** sean $h, k \in \mathcal{F}_{A,A'}$ tales que $\psi(h) = \psi(k)$, luego

$$\begin{aligned}\psi(h) = \psi(k) &\Leftrightarrow g \circ h \circ f^{-1} = g \circ k \circ f^{-1} \\ &\Rightarrow (g \circ h \circ f^{-1}) \circ f = (g \circ k \circ f^{-1}) \circ f \\ &\Rightarrow g \circ (h \circ f^{-1} \circ f) = g \circ (k \circ f^{-1} \circ f) \\ &\Rightarrow g \circ (h \circ id) = g \circ (k \circ id) \\ &\Rightarrow g \circ h = g \circ k \\ &\Rightarrow g^{-1} \circ (g \circ h) = g^{-1} \circ (g \circ k) \quad (g \text{ biyectiva}) \\ &\Rightarrow h = k\end{aligned}$$

por lo tanto ψ es inyectiva.

sobreyectividad: sea $\bar{h} \in \mathcal{F}_{B,B'}$, veamos que existe $h \in \mathcal{F}_{A,A'}$ tal que $\psi(h) = \bar{h}$, es decir, $g \circ h \circ f^{-1} = \bar{h}$. Haciendo un procedimiento análogo al anterior, vemos que la función $h = g^{-1} \circ \bar{h} \circ f$ cumple con $\psi(h) = \bar{h}$. Verifiquemos que esta función h está bien definida y que pertenece a $\mathcal{F}_{A,A'}$.

Para que esté bien definida, debemos tener que:

$$\text{Rec}(f) \subseteq \text{Dom}(\bar{h}) \wedge \text{Rec}(\bar{h}) \subseteq \text{Dom}(g^{-1})$$

lo que se cumple.

Veamos por último que pertenece a $\mathcal{F}_{A,A'}$:

$$- g \circ \bar{h} \circ f : \text{Dom}(f) \rightarrow \text{Rec}(g^{-1} \circ \bar{h})$$

$$- \text{Rec}(g^{-1} \circ \bar{h}) = \text{Rec}(g^{-1})$$

y como $\text{Dom}(f) = A \wedge \text{Rec}(g^{-1}) = A'$ obtenemos que ψ es sobreyectiva.

2. ($\Rightarrow$) Suponemos h inyectiva. Veamos que $\psi(h)$ es inyectiva:

$\psi(h) = g \circ h \circ f^{-1} = (g \circ h) \circ f^{-1}$. Ahora, como f es sobreyectiva, entonces f^{-1} es sobreyectiva y se concluye que f^{-1} es inyectiva. Además $g \circ h$ es inyectiva, pues la composición de funciones inyectivas es inyectiva, de lo que concluimos que $\psi(h)$ es inyectiva (composición de inyectivas).

($\Leftarrow$) Suponemos que $\psi(h)$ es inyectiva. Veamos que h es inyectiva: como f y g^{-1} son inyectivas, entonces $g^{-1} \circ \psi(h) \circ f$ es inyectiva, pero:

$$g^{-1} \circ \psi(h) \circ f = g^{-1} \circ g \circ h \circ f^{-1} \circ f = h$$

por lo tanto h es inyectiva.

3. Esta parte es exactamente igual a la parte anterior, pues la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva y f, g, f^{-1} y g^{-1} son funciones sobreyectivas.

□

P6) Sean $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definidas en cada $n \in \mathbb{N}$ por $f(n) = 2n + 1$ y $g(n) = n^2 + 1$.

1. Determinar si f y g son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.
2. Determinar $f \circ g$ y $g \circ f$.
3. Calcular $g \circ f(A)$ y $(f \circ g)^{-1}(A)$, donde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Solución:

1. **inyectividad:**

- para f : sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) = f(m)$

$$f(n) = f(m) \Leftrightarrow 2n + 1 = 2m + 1$$

$$\Leftrightarrow 2n = 2m$$

$$\Leftrightarrow n = m$$

$$\Leftrightarrow f \text{ es inyectiva}$$

- para g : sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $g(n) = g(m)$

$$g(n) = g(m) \Leftrightarrow n^2 + 1 = m^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow n^2 = m^2$$

$$\Leftrightarrow n = m \quad (\text{notar que esta equivalencia no ser\'{a} cierta si } n \vee m \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow g \text{ es inyectiva}$$

sobreyectividad:

- para f : sea $n \in \mathbb{N}$, veamos si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $2m + 1 = n$. Nos serviría $m = \frac{n-1}{2}$, pero queremos que $m \in \mathbb{N}$ y para que esto se cumpla debemos tener que n es impar. Por lo tanto sólo tienen preimagen los impares, lo que implica que f no es sobreyectiva.

- para g : sea $n \in \mathbb{N}$, veamos si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g(m) = n$

$$g(m) = n \Leftrightarrow m^2 + 1 = n$$

$$\Leftrightarrow m = \sqrt{n-1} \notin \mathbb{N} \text{ en general}$$

$$\Rightarrow g \text{ no es sobreyectiva}$$

Entonces, dado que ni f ni g son sobreyectivas, ninguna es biyectiva.

2. $f \circ g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es tal que: sea $n \in \mathbb{N}$,

$$f \circ g(n) = f(g(n))$$

$$= f(n^2 + 1)$$

$$= 2(n^2 + 1)$$

$$= 2n^2 + 3$$

$g \circ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es tal que: sea $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
g \circ f(n) &= g(f(n)) \\
&= g(2n+1) \\
&= (2n+1)^2 + 1 \\
&= 4n^2 + 4n + 2
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
g \circ f(A) &= \{n \in \mathbb{N} \mid \exists a \in A, g \circ f(a) = n\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} \mid \exists a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, 4a^2 + 4a + 2 = n\} \\
&= \{10, 26, 50, 82, 122\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g \circ f)^{-1}(A) &= \{n \in \mathbb{N} \mid g \circ f(n) \in \{10, 26, 50, 82, 122\}\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} \mid 4n^2 + 4n + 2 \in \{10, 26, 50, 82, 122\}\} \\
&= \{0\}
\end{aligned}$$

□

3.2. Problemas propuestos.

P1) Sea $f : E \rightarrow F$ una función y $A, B \subseteq E$.

1. Demostrar que $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.
2. $\tilde{A}$, Qué condición debe cumplir f para que $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$?
3. $\tilde{A}$, Qué condición debe cumplir f para que $f(E \setminus B) = F \setminus f(B)$?

P2) Sea F el conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $f \in F$ le asocia $\varphi(f) = f(0)$. Demuestre que φ es una función sobreyectiva.

P3) Sean $f : E \rightarrow F$ y $g : F \rightarrow E$ dos funciones tales que $g \circ f = id_E$. Probar que f es inyectiva y que g es sobreyectiva.

P4) Sea la función $f : [3, +\infty) \rightarrow [2, +\infty)$ tal que $f(x) = x^2 - 6x + 11$ en cada $x \geq 3$. Demostrar que f es biyectiva y determinar f^{-1} .

P5) Sean $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ y $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tres funciones definidas en cada $x \in \mathbb{Z}$ como $f(x) = 1 - x$, $g(x) = -x - 1$ y $h(x) = x + 2$.

1. Verificar que f , g y h son invertibles.
2. Probar que $h \circ g \circ f = g \circ f \circ h = id_{\mathbb{Z}}$.
3. Deducir de (ii) que $f^{-1} \circ g^{-1} = h$.

P6) Sean $E \neq \emptyset$ y $A \subseteq E$ (fijo). Se definen las funciones f y g de $\mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(E)$ tales que: $f(X) = A \cup X$ y $g(X) = A \cap X$ para todo $X \subseteq E$.

1. Determinar $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(A^c)$ y $f(E)$.
2. Demostrar que $g \circ f = f \circ g$.
3. Determinar si f y g son sobreyectivas.
4. Determinar un conjunto A para el cual f es biyectiva.
5. Determinar un conjunto A para el cual g es biyectiva.