5. Semana 4

P1 Se resolverá por contrarecíproca,es decir,

$$A \neq \emptyset \Rightarrow (\exists X, Y \in P(U))(A \cup X = A \cup Y \wedge X \neq Y)$$

Al castellano, hay que encontrar dos conjuntos tales que $A \cup X = A \cup Y$ y además sean distintos entre sí. En efecto tomemos $X = A$ e $Y = \emptyset$, los cuales son distintos por hipótesis ($A \neq \emptyset$), se tiene entonces que $A \cup X = A \cup Y \Leftrightarrow A \cup A = A \cup \emptyset \Leftrightarrow A = A$, lo cual es correcto, y se concluye la demostración.

P2 $\Rightarrow$ Se sabe por propiedad del apunte que $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$, con esto se tiene que

$$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B) = P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$\Leftarrow$ Se sabe que $A \cap B \subseteq A$ y que $A \cap B \subseteq B$

$$\begin{aligned} & A \cap B \subseteq A \wedge A \cap B \subseteq B \\ \Leftrightarrow\ & A \cap B \in P(A) \wedge A \cap B \in P(B) \\ \Leftrightarrow\ & A \cap B \in P(A) \cap P(B) \\ \Rightarrow\ & A \cap B \in \{\emptyset\} \\ \Leftrightarrow\ & A \cap B \subseteq \emptyset \end{aligned}$$

Y como $\emptyset \subseteq A \cap B$ se tiene lo pedido ($A \cap B = \emptyset$).

P3 **(1)** $A \in \mathcal{F}$, luego $A \circledast A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c \cap A^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{F}$.

(2) $A^c, B^c \in \mathcal{F}$, luego $A^c \circledast B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (A^c)^c \cap (B^c)^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

(3) Como $(A^c \cap B^c) \in \mathcal{F}$, por (1), se tiene que $(A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$.

(4) Como $(A^c \cap B^c) \in \mathcal{F}$ y $(A \cap B) \in \mathcal{F}$, se tiene que $(A^c \cap B^c) \circledast (A \cap B) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (A^c \cap B^c)^c \cap (A \cap B)^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \triangle B \in \mathcal{F}$.

(5) $A, A^c \in \mathcal{F}$, luego $A \circledast A^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$, como $\emptyset \in \mathcal{F}$, por (1), $\emptyset^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow U \in \mathcal{F}$.

P4 **(a)** Como x siempre pertenece a E se tiene que $\delta_E(x) = 1$, como x nunca pertenece a $\emptyset$ se tiene que $\delta_\emptyset(x) = 0$.

(b) Tenemos 4 casos:

- $\delta_A(x) = 1$ y $\delta_B(x) = 1$, es decir $x \in A$ y $x \in B$, con lo cual $x \in A \cap B$, $\delta_A(x)\delta_B(x) = \delta_{A\cap B}(x) = 1$.
- $\delta_A(x) = 1$ y $\delta_B(x) = 0$, es decir $x \in A$ y $x \notin B$, con lo cual $x \notin A \cap B$, $\delta_A(x)\delta_B(x) = \delta_{A\cap B}(x) = 0$.
- $\delta_A(x) = 0$ y $\delta_B(x) = 1$, es decir $x \notin A$ y $x \in B$, con lo cual $x \notin A \cap B$, $\delta_A(x)\delta_B(x) = \delta_{A\cap B}(x) = 0$.

- $\delta_A(x) = 0$ y $\delta_B(x) = 0$, es decir $x \notin A$ y $x \notin B$, con lo cual $x \notin A \cap B$, $\delta_A(x)\delta_B(x) = \delta_{A\cap B}(x) = 0$.

Se concluye que $\delta_A(x)\delta_B(x) = \delta_{A\cap B}(x)$.

(c) $\Rightarrow$ Si $x \in C, \delta_C(x) = 1$, pero como $C \subseteq D \Rightarrow x \in D, \delta_D(x) = 1$. Si $x \notin C, \delta_C(x) = 0$, luego $\delta_D(x) = 0$ o 1, en cualquier caso se tiene que $\delta_C(x) \leq \delta_D(x)$.

$\Leftarrow$ Tomando $x \in C, \delta_C(x) = 1$ debido a que $\delta_C(x) \leq \delta_D(x)$,$\delta_D(x) = 1 \Rightarrow x \in D$.