MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesora: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 04: conjuntos y Funciones

08 de Abril

Resumen

- **[Producto Cartesiano]**: Para $A \subseteq E$ y $B \subseteq F$ se define el conjunto $A \times B$ como: $A \times B := \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}$
- **[Algunas propiedades]**: Sí $A_1, A_2 \subseteq E$ y $B_1, B_2 \subseteq F$ entonces:
  1. $A_1 \times \emptyset = \emptyset \times B_1 = \emptyset$
  2. $A_1 \subseteq A_2$ y $B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$
  3. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$
  4. $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$
- **[Conjunto potencia]**: Se define el conjunto potencia (o tambien llamado conjunto de las partes) $\mathcal{P}(A)$ al conjunto de todos los subconjuntos de A:

  $$\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq E | X \subseteq A\}$$

  Obs. : $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$ siempre.
- **[Unión e intersección de Conjuntos potencia]**:
  1. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
  2. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$
- **[Partición de conjuntos]**: Llamaremos a $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(A)$ partición de A si se cumple:
  - $\forall C \in \mathcal{C}, C \neq \emptyset$
  - $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ si $C_1 \neq C_2$, entonces $C_1 \cap C_2 = \emptyset$
  - $\mathcal{C}$ cubre A: $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$
- **[Definición Función]**: Una función de A a B ($f : A \longrightarrow B$) es una 3-tupla $f = (A, B, G)$ que satisface:
  - $G \subseteq A \times B$
  - $\forall a \in A, \exists! b \in B,\ (a,b) \in G$

  Obs. : Para clarificar conceptos:
  - Podemos escribir $b = f(a)$ pues b -dado a- posee un unico valor.
  - $G = \{(a,b) \in A \times B \mid b = f(a)\} = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$
  - A es llamado dominio de f ($Dom\ f$) y B codominio de f ($Cod\ f$).
- **[Igualdad de Funciones]**: Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$ son funciones, entonces

  $$f = g \Longleftrightarrow Dom\ f = Dom\ g \wedge Cod\ f = Cod\ g \wedge \forall x \in Dom\ f, f(x) = g(x)$$

  Obs. : Esta definición de igualdad nos dice básicamente que ambas 3-tuplas son iguales: $(A, B, G_f) = (C, D, G_g)$
- **[Inyectividad]**: Diremos que una función $f : A \to B$ es inyectiva si:

  $$\forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$
- **[Epiyectividad]**: Diremos que una función $f : A \to B$ es epiyectiva si:

  $$\forall y \in B, \exists x \in A,\ y = f(x)$$

[MÓDULO COMÚN]
En lo que sigue, $E \neq \emptyset$ y $F \neq \emptyset$ denotan conjuntos de referencia.Sean $A, B \subseteq E$ y $C, D \subseteq F$.

P1. *a)* Pruebe que $(E \setminus A) \times F = (E \times F) \setminus (A \times F)$.
Desarrollo análogo coordenada a coordenada a parte b!!

b) Pruebe que $(A \setminus B) \times (C \setminus D) \subseteq (A \times C) \setminus (B \times D)$. Muestre, con un contraejemplo, que no se tiene la igualdad.
Tomaremos $(a, b) \in (A \setminus B) \times (C \setminus D)$ lo que equivale a que $a \in A \wedge a \notin B \wedge b \in C \wedge b \notin D$ lo que equivale por coordenada a coordenada $(a, b) \in (A \times C) \wedge (a, b) \notin (B \times D)$ Por lo que se tiene la inclusión.
Para el contra ejemplo, pensar en un conjunto finito que tengan elementos en comunes algunos de los conjuntos, esto les será de mucha ayuda, y como dato un conjunto de hasta 2 elementos ya sirve, pues quiero ver un contraejemplo, con lo que si un caso falla no es válida la inclusión para todas.

c) Pruebe que $A \neq \emptyset \wedge A \times C = A \times D \implies C = D$.
Tenemos que probar una igualdad por lo que lo haremos por doble inclusión, pero trabajando los casos en que C es vacío o no.
Supongamos $C = \emptyset$ como sabemos que $A \neq \emptyset$ y además que un producto con un conjunto vacío es vacío deducimos $A \times C = \emptyset = A \times D$ luego tenemos que $D = \emptyset$ porque A es no vacío.
Luego supongamos $C \neq \emptyset$

PDQ $C = D \Leftrightarrow C \subseteq D \wedge D \subseteq C$
Vamos con la primera inclusión, sea $x \in C \wedge y \in A$ luego el par ordenado $(x, y) \in A \times C = A \times D$, por hipótesis, lo que quiere decir que cada elemento vive coordenada a coordenada respectivamente por lo que $x \in D$
Vamos con la inclusión pendiente sea $x \in D \wedge y \in A$ luego el par ordenado $(x, y) \in A \times D = A \times C$, por hipótesis, lo que quiere decir que cada elemento vive coordenada a coordenada respectivamente por lo que $x \in C$
Tomar en cuenta que x, y son arbitrarios y variables mudas.
$\therefore C = D$

P2. ***[MÓDULO COMÚN]***

a) Encuentre (enumere) todos los elementos de $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\{0, 1\} \times \{0, 1, 2\})$ donde

$$C \in \mathcal{A} \iff \forall (x, y), (x', y') \in C, x + y = x' + y'.$$

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $D_n = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + b = n\}$. Demuestre que $\mathcal{C} = \{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una partición de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Indicación: Se dice que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ es una partición de A si las siguientes condiciones se cumplen:

- $\forall C \in \mathcal{C}$, $C \neq \emptyset$.
- $\forall C, C' \in \mathcal{C}$, si $C \neq C'$, entonces $C \cap C' = \emptyset$.
- $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$.

1. Intuición:En este ejericio el primero es solo enumerarar y notar que la suma es conmutativa, por lo que $(1, 2)$ y $(2, 1)$ cumpliran que su suma es fija, esto será crucial para desarrollarlo.
   Para la parte de la partición es claro que será probar su definición.
2. Teoría:Manejar pares ordenados y concepto de partición.

3. Matraca:Enumerar todo ordenadamente. Para el recubirimiento trabajar con doble inclusión.

1)El ver que es no vacío basta encontrar un elemento D_n, en este caso sabemos que $1 = 1 + 0 = 0 + 1$ donde el par ordenado $(1, 0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ luego por esto existe al menos un par ordenado que lo cumpla, luego $D_n \neq \emptyset$, luego $\mathcal{C} = \{D_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \mathcal{C} \neq \emptyset$
2)Como queremos probar una implicancia lo probaremos a través de contradicción, por lo que negaremos la tesis.
Sea $D_n, D_m, n \neq m$ luego por contradicción asumimos $D_n \cap D_m \neq \emptyset$
Luego por hipótesis y como se define D_n, tenemos que existe un $(a, b) \in D_n \cap D_m$, luego como es una conjunción el par ordenado vive en ambos conjuntos, entonces se tiene que $(a, b) \in D_n, tq, a + b = n$ y $(a, b) \in D_m, tq, a + b = m$, luego por la iguadlad de $a + b = n = m$, lo que genera una contradicción $\Longleftrightarrow$ pues se supuso anteriormente que $n \neq m$
Por lo que los conjuntos $D_n, \forall n \in \mathbb{N}$ deben ser disjuntos, pero en particular estos conjuntos definen los elementos de $\mathcal{C}$, por lo que los elementos de $\mathcal{C}$ deben ser disjuntos.
3)Debemos probar la igualdad con la unión de los conjuntos de $\mathcal{C}$, lo que quiere decir que recubre a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Esto lo haremos mediante doble inclusión, lo cual no es tan complicado, pues el argumento es similar para ambos casos

$Caso1$:$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subseteq \mathcal{C}$ Sea $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ luego puedo definir que estos elementos me den una suma fija, SPG(sin perdida de generalidad), sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $x + y = j$, por cerradura de la suma en naturales todo está bien definido, y ahora en particular por definición de $D_j, (x, y) \in D_j \subseteq \mathcal{C}$, esta última inclusión por como se define $\mathcal{C}$.

$Caso2$:$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Lo que se tiene pues el conjunto $\mathcal{C}$ está definido a través de elementos de D_n, el cual está definido a través de elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, con lo que se deduce la inclusión.
Con ambas inclusiones se tiene la inclusión y $\mathcal{C}$ recubre el conjunto.

P3. ***[MÓDULO COMÚN]***

Sea $A \subseteq E$ y suponga que E tiene al menos dos elementos. Pruebe que

$$(\forall B \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}, A \subseteq B) \implies A = \emptyset.$$

a) Intuición:La manera de desarrollar este tipo de problemas es que tenemos Una implicancia por lo que la contrarecíproca O contradicción pueden ser muy buenas armas, en este caso usaremos la segunda.
por otra parte notar que me dice que tiene al menos dos elementos por lo que si soy subconjunto de este conjunto tengo al menos un elemento, 2 o más. Separaremos esto en 2 partes Si tengo un solo elemento o tengo 2 o más.

b) Teoría:Saber trabajar con elementos en las partes, y teoría de conjuntos para probar la implicancia.

c) Matraca:Ponerme en los casos mencionados, y con esto veré que pasa si saco un elemento en particular y como se comportará el conjunto!

Procedemos por contradicción por lo que $A \neq \emptyset$, de todos modos se de antemano por hipótesis que $\forall B \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}, A \subseteq B$
1)A tiene al menos 2 elementos, sea $x \in A$ luego $A \setminus \{x\} \neq \emptyset$, pues $A \neq \emptyset$ y hay otro elemento.
Además se tiene de manera simultánea que $A \setminus \{X\}E \Leftrightarrow A \setminus \{X\} \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ Luego por hipótesis los todos los elementos en la partes de E sin el vació cumplen dicha inclusión, pero $A \subseteq A \setminus \{X\}$ es una contradicción! $\Leftarrow$! $\Rightarrow$(me quedó al revés pero inserte símbolo de contradicción)
$\therefore A = \emptyset$ si A tiene al menos 2 elementos!
2)A tiene un elemento, lo que equivale a que es un síngleton ,es decir, $A = \{x\}$ como E tiene al menor otro diferente, $\exists y \in E, x \neq y$ Luego $\{y\} \in \mathcal{P}(E) \setminus \{x\}$ ya que $\{y\} \subseteq E$ Luego por el mismo argumento anterior por hipótesis $A = \{x\}\{y\}$ pero esto es una contradicción! $\Rightarrow$! $\Leftarrow$ porque $\{x\} \neq \{y\}$
$\therefore A = \emptyset$ si A tiene un elemento.
Notemos que el caso en que A es vacío no se estudia porque como está definido el conjunto de la hipótesis, no puede ser vacio.
Por lo tanto se tiene la implicancia pedida, porque en cada caso posible se probó por contradicción!

P4. ***[MÓDULO PROPIO]Propiedades de las partes***

Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$, demuestre que:

I) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

II) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$

III) $\mathcal{P}(A) = \{A \cap X \mid X \in \mathcal{P}(E)\}$

a) Intuición: Notar que se quieren probar 2 inclusiones y una igualdad. Para esta última se debe tener en cuenta que la forma tradicional de trabajarla es con una doble inclusión.
También que este método es tomar un elemento arbitrario en el conjunto más pequeño y probar que debe estar en el conjunto más grande, como una especie de condición.

b) Teoría:Manejar bien la caracterización de inclusión a través de proposiciones lógicas será importante para este ejercicio, además de tener clara la definición de un conjunto potencia y el tipo de elementos que posee para trabajar el problema.
¿La inclusión como relación, cumple transitividad?
Recordar que una implicancia tiene la gracia de poder probar las cosas mediante contradicción.

c) Matraca: Para los 3 casos realizando el método descrito y correcto uso de las propiedades, esta parte no debería ser tan extensa.

Solución P5

I) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
Como debemos probar una doble implicancia veremos ambas con argumentos similares. Para el desarrollo que continúa proposiciones compuestas de la forma $p \Rightarrow q$, a p se le llamará hipótesis, y a q se le llamará tesis.

$(\Rightarrow)$
Para la implicancia a la derecha se tomará como hipótesis $A \subseteq B$ y se probará $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
Como es usual en demostraciones de inclusiones, se tomará un elemento arbitrario en $\mathcal{P}(A)$ y se probará que debe estar en $\mathcal{P}(B)$.
Sea $x \in \mathcal{P}(A)$(ojo que es elemento de las partes por lo que es un conjunto) lo cual por su definición vista en clases $\Leftrightarrow x \subseteq A$, por definición del conjunto potencia. Luego recordando la hipótesis $A \subseteq B$ tenemos que $x \subseteq A \subseteq B$, luego por transitividad de la inclusión como relación de orden.$\Rightarrow x \subseteq B \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(B)$, Esto por la equivalencia de la definción del conjunto potencia.
Tomamos un elemento en el conjunto potencia de A y probamos que necesariamente debía estar en el conjunto potencia de B.
$\therefore$P(A)$\subseteq \mathcal{P}(B)$

$(\Leftarrow)$
Ahora nuestra hipótesis será $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, es decir la implicancia a la izquierda. Debemos probar que $A \subseteq B$.
Sabemos que toda igualdad de conjuntos es equivalente a una doble inclusión de los conjuntos, por lo que por $A = A \Leftrightarrow A \subseteq A$, luego que un posible subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ es el mismo conjunto A, pues es un posible subconjunto de A.
Por otra parte $\forall x \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow x \in \mathcal{P}(B)$, Por la inclusión de la hipótesis. Basta tomar $x = A$, lo que se traduce en $A \in \mathcal{P}(B)$.
Por defínción de conjunto potencia esto equivale a AB. Lo que prueba la segunda implicancia.
$\therefore$A $\subseteq B$

Luego por tener ambas implicancias se tiene la equivalencia que se pide.
$\therefore$A$\subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

II) Sea $x \in \mathcal{P}(A \setminus B) \Leftrightarrow x \subseteq A \setminus B$ *donde*
(1) $\Leftrightarrow x \subseteq A \cap B^c \subseteq A \Rightarrow x \subseteq A$
(2) $\Leftrightarrow x \subseteq A \cap B^c \subseteq B^c \Rightarrow x \subseteq B^c$
Donde de (1) por definición de conjunto potencia se tiene $x \subseteq A \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A)$ (3)
Veamos como se comporta lo que quiero probar, es decir, un $x \in [((\mathcal{P}(A)) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}]$
$\Leftrightarrow x \in [(\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{P}(B)^c)) \cup \{\emptyset\}]$
$\Leftrightarrow [x \in (\mathcal{P}(A) \wedge x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x \in \{\emptyset\}]$ Por la parte (3) reemplazamos esto y ahora lo que queremos probar es equivalente a
$\Leftrightarrow [x \in (\mathcal{P}(A) \wedge x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x \in \{\emptyset\}]$
$\Leftrightarrow [(V \wedge x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x \in \{\emptyset\}]$
$\Leftrightarrow [x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x \in \{\emptyset\}]$ esto por lo dicho en parte (3) y dominancía de la conjunción con V.
Luego debemos estudiar 2 casos
Caso 1: $x \in \{\emptyset\} \Leftrightarrow x = \emptyset$

Lo cual se tiene de manera directa, pues coo se trata de una disyunción basta que una de las proposiciones sea verdadera para que toda la expresión sea verdadera, con esto no importa el valor de verdad de $x \notin \mathcal{P}(B)$

La expresión queda:

$\Leftrightarrow [x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x \in \{\emptyset\}]$, pero $x = \emptyset$
$\Leftrightarrow [x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x = \emptyset$
$\Leftrightarrow [x \notin \mathcal{P}(B)) \vee V \Leftrightarrow V$ Pues verdadero y cualquier cosa es Verdadero.
Caso 2: $x \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow [x \in (\mathcal{P}(A) \wedge x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x \in \{\emptyset\}]$
$\Leftrightarrow [(V \wedge x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x = \emptyset]$
$\Leftrightarrow [(V \wedge x \notin \mathcal{P}(B)) \vee F]$
$\Leftrightarrow [(x \notin \mathcal{P}(B)) \vee F]$
$\Leftrightarrow x \notin \mathcal{P}(B)]$ Entonces para este caso basta probar esto. Supondremos por contradicción que $x \in \mathcal{P}(B)] \Leftrightarrow x \subseteq B \Leftrightarrow x \cap B^c = \emptyset$ (4), pero por (2) tenemos $x \subseteq B^c \Leftrightarrow x \cap B^c = x \neq \emptyset$ por enunciado, pero por (4) $x \cap B^c = \emptyset$
Lo que genera una contradicción $\Rightarrow\Leftarrow$, por lo que asumimos debe ser erróneo, es decir $\Leftrightarrow x \notin \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow$
Como vimos que para $x = \emptyset \vee x \neq \emptyset$ se cumple que es verdadera la expresión a probar dada la hipótesis entregada. $\therefore$ P(A$\backslash B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$

III) PDQ. $\mathcal{P}(A) = \{A \cap X | X \in \mathcal{P}(E)\}$, siendo E el conjunto de referencia.
Para esto como es una igualdad procedemos por doble inclusión.
1)$\mathcal{P}(A) \subseteq \{A \cap X | X \in \mathcal{P}(E)\}$
Tomaremos un elemento en las partes de A, donde luego llegaremos a que es parte del conjunto de la derecha. Sea $B \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow B \subseteq A$, por defínción de ser un elemento de las partes. En particular como B está contenido en A, se tiene lo siguiente $B = B \cap A$, ahora como B es parte del conjunto de referencia se tiene $B \subseteq E \Leftrightarrow B \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ por definición de estar en las partes, luego como el conjunto B era un conjunto arbitrario, podemos decir $\exists X = B \in \mathcal{P}(E), B = A \cap X$
2)$\{A \cap X | X \in \mathcal{P}(E)\} \subseteq \mathcal{P}(A)$
Sea $B \in \{A \cap X | X \in \mathcal{P}(E)\}$, un B arbitrario $\Rightarrow \exists X \in \mathcal{P}(A), B = A \cap X$, luego sabemos que toda intersección está contenida en alguno de los dos conjuntos, por lo tanto tenemos la siguiente inclusión donde usaremos la igualdad mencionada recién $A \cap X \subseteq A \Leftrightarrow [B \subseteq A]$ lo que equivale por definición de las partes de un conjunto $B \in \mathcal{P}(A)$
$\therefore \{A \cap X | X \in \mathcal{P}(E)\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

Por ambas inclusiones tenemos la igualdad de conjuntos.
$\mathcal{P}(A) = \{A \cap X | X \in \mathcal{P}(E)\}$

PROPUESTOS

P5. *[MÓDULO PROPIO]Particiones*

a) Sea $\mathcal{C}$ una partición de un conjunto B. Sea $A \subseteq B$ subconjunto, se define $\mathcal{C}_A := \{C \cap A \mid C \in \mathcal{C}, C \cap A \neq \emptyset\}$. Pruebe que $\mathcal{C}_A$ es una partición de A.

b) Dado $n \in \mathbb{R}$ define el siguiente conjunto en $\mathbb{R}^2$:

$$L_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + n\}$$

Pruebe que $\mathcal{C} = \{L_n \mid n \in \mathbb{R}\}$ es partición del plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$).

c) Encuentre una partición para la mitad superior del plano cartesiano, es decir para:

$$\Pi_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

1. Intuición:
2. Teoría:
3. Matraca:

P6. ***[MÓDULO PROPIO]Función diferencia***
Dado $A \in \mathcal{P}(E)$ se define la función $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ por:

$$f(X) = A\Delta X$$

Verifique si

a) f es inyectiva

b) f es sobreyectiva.

P7. ***[MÓDULO COMÚN]***
Se quiere definir una función con dominio $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y codominio $\mathbb{N}$. En cada uno de los siguientes casos, indique si queda bien definida (justifique):

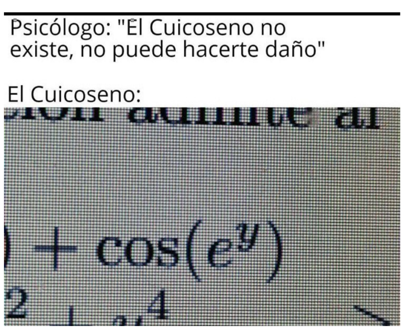
1. A $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se le asocia el menor elemento en S.
2. A $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se le asocia el mayor elemento en S.
3. A $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se le asocia el menor elemento en $S \cup S^c$.

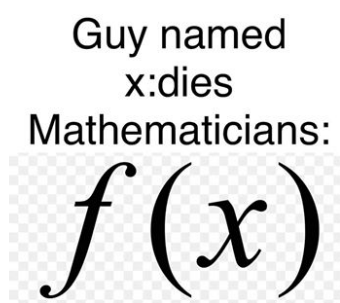
P8. ***[MÓDULO COMÚN]***

a) Sean $A, B \subseteq E$. Pruebe que $\mathcal{P}(A) = \{X \cup Y \subseteq E \,|\, X \in \mathcal{P}(A \cap B) \wedge Y \in \mathcal{P}(A \setminus B)\}$.

b) Sea $A \subseteq E$ y suponga que E tiene al menos dos elementos. Pruebe que

$$(\forall B \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}, A \subseteq B) \implies A = \emptyset.$$





"Nos esforzamos por emplear solo figuras simétricas, que no solo deberían ser una ayuda para el razonamiento, a través del sentido de la vista, sino que también deberían ser hasta cierto punto elegantes en sí mismas."
John Venn

Ya terminamos!

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl