

MA1101-6 Introducción al Álgebra 2023

Profesor: Leonardo Sánchez.

Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón

Correo: pyanez@dim.uchile.cl



Auxiliar 06: Funciones, Imagen y Preimagen Y Repaso Control

tiempo

Resumen

- **[Conjunto Imagen]:** Sea $f : A \rightarrow B$ función, y $C \subseteq A$. Se define el conjunto imagen de C por f :

$$f(C) = \{f(x) \in B \mid x \in C\}$$

- **[Equivalencia epiyectividad]:** $f : A \rightarrow B$ es epiyectiva si y solo si $f(A) = B$

- **[Propiedades Imagen]:**

$$\text{I) } A \subseteq C \implies f(A) \subseteq f(C)$$

$$\text{II) } f(A \cap C) \subseteq f(A) \cap f(C)$$

$$\text{III) } f(A \cup C) = f(A) \cup f(C)$$

- **[Conjunto Preimagen]:** Sea $f : A \rightarrow B$ función, y $D \subseteq B$. Se define el conjunto preimagen de D por f :

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$$

- **[Propiedades PreImagen]:**

$$\text{I) } B \subseteq D \implies f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(D)$$

$$\text{II) } f^{-1}(B \cap D) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)$$

$$\text{III) } f^{-1}(B \cup D) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D)$$

- **[Inclusiones relevantes]:** Sea $f : A \rightarrow B$, con $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$, entonces:

$$\bullet C \subseteq f^{-1}(f(C))$$

$$\bullet f(f^{-1}(D)) = D \cap f(A) \quad \text{En particular: } f(f^{-1}(D)) \subseteq D$$

- **[Inyectividad y sobreyectividad]:** Sea $f : A \rightarrow B$ función. Se tiene:

I) f es inyectiva si y solo si:

$$\forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \vee (\exists! x \in A, f^{-1}(\{y\}) = \{x\})$$

II) f es epiyectiva si y solo si:

$$\forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$$

III) f si es biyectiva, entonces:

$$\forall C \subseteq B, f^{-1}(\{y\}) = (\{f^{-1}(y)\})$$

- **[Relación]:** Es una tripleta $(A, B, \mathcal{R})$ que cumple $\mathcal{R} \subset A \times B$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ denotamos $a\mathcal{R}b$

- **[Propiedades de relaciones]:** Una relación R en A es:

- **Refleja:** si $\forall x \in A, x\mathcal{R}x$

- **Simétrica:** si $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$

- **Antisimétrica:** si $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \implies y = x$

- **Transitiva:** $\forall x, y, z \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$

- **[Ejemplo de relación]:** En $\mathbb{Z}$ se define la relación divisibilidad, que se anota $a|b$ si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = qa$.

- **[Relación de orden]:** $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A , si es una relación **refleja, antisimétrica y transitiva**.

Observación: $\mathcal{R}$ es un orden total si para todo $x, y \in A$, $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$.

- **[Relación de equivalencia]:** $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A , si es una relación **refleja, simétrica y transitiva**.

P1. PREGUNTA

Sea $f : \tilde{E} \rightarrow F$ y $g : F \rightarrow G$ funciones.

a) Sea $A \subseteq G$. Probar que:

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

b) Sea $B \subseteq F$. Probar que:

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$$

P2. PREGUNTA

Sea $U \neq \emptyset$ un conjunto universo. Se define la función

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) &\longrightarrow \mathcal{P}(U) \\ (X, Y) &\longrightarrow f((X, Y)) = X \setminus Y \end{aligned}$$

- Demuestre que $f^{-1}(\{U, \emptyset\}) = \{(U, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) \mid X \subseteq Y\}$
- Determine $f(D)$, con $D = \{(X, X) \mid X \in \mathcal{P}(U)\}$
- Demuestre que f es sobreyectiva.
- ¿Es f biyectiva? Justifique.

P3. Sean E, F conjuntos no vacíos. Sea $f : E \rightarrow F$ una función [Propuesto].

- Demuestre que $\forall A, B \subseteq F, f^{-1}(A \triangle B) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$.
- Demuestre que $\forall A, B \subseteq E, f(A) \triangle f(B) \subseteq f(A \triangle B)$, y que si f es inyectiva entonces se tiene la igualdad.
- Intuición:
- Teoría:
- Matraca:

P4. Sean E, F y G conjuntos no vacíos. Sean $f : E \rightarrow F$ y $g : F \rightarrow G$ funciones [Propuesto].

- Demuestre que $(\forall A, B \subseteq E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)) \Leftrightarrow f$ es inyectiva.
- Demuestre que $\forall A \subseteq G, (g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

