MA1101-6 Introducción al Álgebra 2023
Profesor: Leonardo Sánchez.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 05: Funciones

Resumen

- **[Definición Función]**: Una función de A a B ($f : A \longrightarrow B$) es una 3-tupla $f = (A, B, G)$ que satisface:
  - $G \subseteq A \times B$
  - $\forall a \in A, \exists! b \in B,\ (a, b) \in G$

  Obs. : Para clarificar conceptos:
  - Podemos escribir $b = f(a)$ pues b -dado a- posee un unico valor.
  - $G = \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\} = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$
  - A es llamado dominio de f ($Dom\ f$) y B codominio de f ($Cod\ f$).

- **[Igualdad de Funciones]**: Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ son funciones, entonces

$$f = g \iff Dom\ f = Dom\ g \wedge Cod\ f = Cod\ g \wedge \forall x \in Dom\ f, f(x) = g(x)$$

  Obs. : Esta definición de igualdad nos dice básicamente que ambas 3-tuplas son iguales: $(A, B, G_f) = (C, D, G_g)$

- **[Inyectividad]**: Diremos que una función $f : A \to B$ es inyectiva si:

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

- **[Epiyectividad]**: Diremos que una función $f : A \to B$ es epiyectiva si:

$$\forall y \in B, \exists x \in A,\ y = f(x)$$

- **[Biyectividad]**: Diremos que una función $f : A \to B$ es biyectiva si es epiyectiva e inyectiva a la vez, o equivalentemente:

$$\forall y \in B, \exists! x \in A,\ y = f(x)$$

- **[Inversa]**: Dada $f : A \to B$, se define $f^{-1} : B \to A$ como:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

  Observación:
  - $\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x$
  - $\forall y \in B, f(f^{-1}(y)) = y$

- **[Composición]**: Dadas $f : A \to B$ y $g : B \to C$, se define $g \circ f$ como:

$$\forall x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

  Observación: La composición asocia: $h \circ (g \circ f) = (h) \circ f$

- **[Propiedades con la composición]**: Dadas $f : A \to B$ y $g : B \to C$:

  a) Si f y g son inyectivas (epiyectivas, biyectivas respectivamente) entonces $g \circ f$ es inyectiva (epiyectiva, biyectiva respectivamente)

  b) Si $g \circ f$ inyectiva entonces f inyectiva

  c) Si $g \circ f$ epiyectiva entonces g es epiyectiva

- **[Teorema de la inversa]**: Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$. Tenemos que f es biyectiva con inversa g si se satisfacen al menos 2 de las siguientes condiciones:
  - $g \circ f = id_A$
  - $f \circ g = id_B$
  - g es biyectiva

- **[Inversa de a composición]**: Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ biyectivas, entonces

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

P1. Se define la funcion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mediante:

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Determine si f es

a) Inyectiva.

b) Epiyectiva.

c) Biyectiva.

Además, indique si existe la función inversa f^{-1}, y en caso de existir, determine $f^{-1}(m)$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Justifique sus respuestas.

1. Intuición:
2. Teoría:
3. Matraca:

P2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones, con f biyectiva, tales que para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)(x) = \frac{3x+2}{9x^2+12x+5} \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}.$$

Determine fórmulas explícitas para $f(x)$ y $g(x)$, en función de $x \in \mathbb{R}$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

Justifique sus respuestas.

P3. Sean A, B, C, D conjuntos no vacíos tales que $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$, y sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \to B \cup D$ tal que, $\forall x \in A \cup C$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in C. \end{cases}$$

a) Demuestre que si f y g son inyectivas, entonces h también lo es.

b) Demuestre que si f y g son epiyectivas, entonces h también lo es.

c) Demuestre que si f y g son biyectivas, entonces h también lo es, y encuentre su inversa.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P4. Sean A, B y C conjuntos, y sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : A \to C$ funciones tales que g es inyectiva, h es biyectiva, y $h = g \circ f$.

Demuestre que f y g son biyectivas, y determine f^{-1} en términos de g, h y/o sus inversas.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

Propuestos

P5. ***Precalentamiento***

a) Se define la función $f : [1, 2] \longrightarrow [1, \infty)$ por $f(x) = x^4 + 2$ Estudie inyectividad, epiyectividad, biyectividad de f y - en caso de ser biyectiva - encuentre su inversa.

b) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ se define la función $f : \mathbb{R}\backslash\{\frac{-b}{a}\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{\frac{c}{a}\}$ por:

$$f(x) = \frac{cx}{ax + b}$$

Estudie inyectividad, epiyectividad, biyectividad de f y - en caso de ser biyectiva - encuentre su inversa.

P6. ***Función unión e intersección***

Sea $A \subseteq E$ se definen las funciones $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ y $g : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ por:

$$f(X) = A \cap X, \qquad g(X) = A \cup X$$

a) Demuestre que f es inyectiva $\Leftrightarrow A = E \Leftrightarrow f$ es epiyectiva

b) Demuestre que g es inyectiva $\Leftrightarrow A = \emptyset \Leftrightarrow g$ es epiyectiva.