MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesora: Leonardo Sànchez.
Auxiliares: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 04: Conjuntos y Funciones

17 de Abril

Resumen

- [**Producto Cartesiano**]: Para $A \subseteq E$ y $B \subseteq F$ se define el conjunto $A \times B$ como: $A \times B := \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}$
- [**Algunas propiedades**]: Sí $A_1, A_2 \subseteq E$ y $B_1, B_2 \subseteq F$ entonces:
  1. $A_1 \times \emptyset = \emptyset \times B_1 = \emptyset$
  2. $A_1 \subseteq A_2$ y $B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$
  3. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$
  4. $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$
- [**Conjunto potencia**]: Se define el conjunto potencia (o tambien llamado conjunto de las partes) $\mathcal{P}(A)$ al conjunto de todos los subconjuntos de A:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq E | X \subseteq A\}$$

  Obs. : $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$ siempre.
- [**Unión e intersección de Conjuntos potencia**]:
  1. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
  2. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
- [**Definición Función**]: Una función de A a B ($f : A \longrightarrow B$) es una 3-tupla $f = (A, B, G)$ que satisface:
  - $G \subseteq A \times B$
  - $\forall a \in A, \exists! b \in B, (a,b) \in G$

  Obs. : Para clarificar conceptos:
  - Podemos escribir $b = f(a)$ pues b -dado a- posee un unico valor.
  - $G = \{(a,b) \in A \times B \mid b = f(a)\} = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$
  - A es llamado dominio de f ($Dom\ f$) y B codominio de f ($Cod\ f$).
- [**Igualdad de Funciones**]: Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$ son funciones, entonces

$$f = g \Longleftrightarrow Dom\ f = Dom\ g \wedge Cod\ f = Cod\ g \wedge \forall x \in Dom\ f, f(x) = g(x)$$

  Obs. : Esta definición de igualdad nos dice básicamente que ambas 3-tuplas son iguales: $(A, B, G_f) = (C, D, G_g)$
- [**Inyectividad**]: Diremos que una función $f : A \to B$ es inyectiva si:

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

- [**Epiyectividad**]: Diremos que una función $f : A \to B$ es epiyectiva si:

$$\forall y \in B, \exists x \in A,\ y = f(x)$$

- Se define el conjunto potencia o partes de un conjunto como: $\mathcal{P}(A) = 2^A = \{X : X \subseteq A\}$
- Se define el producto cartesiano entre A y B como: $A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$
- $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda)$
- $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Longleftrightarrow (\forall \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda)$
- $\mathcal{G} \subseteq P(A)$ es partición de A si se cumple:
  1. $\forall C \in \mathcal{G}, C \neq \emptyset$
  2. Los elementos de $\mathcal{G}$, son disjuntos de a pares, es decir, $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{G}$, si $C_1 \neq C_2$, entonces $C_1 \cap C_2 = \emptyset$
  3. $\mathcal{G}$ cubre a A, es decir, $\bigcup_{C \in \mathcal{G}} C = A$
- Sea $S \neq \emptyset$, Las particiones triviales de S son:
  - $\mathcal{G} = \{S\}$
  - $\mathcal{G} = \{\{x\} : x \in S\}$

P1. ***[ ]Propiedades de las partes***
Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$, demuestre que:

I) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$
II) $[P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)] \iff [A \subseteq B \vee B \subseteq A]$.
III) $\mathcal{P}(A) = \{A \cap X \mid X \in \mathcal{P}(E)\}$
IV) (Propuesto)Sean $A, B \subseteq E$. Pruebe que $\mathcal{P}(A) = \{X \cup Y \subseteq E \,|\, X \in \mathcal{P}(A \cap B) \wedge Y \in \mathcal{P}(A \setminus B)\}$.

a) Intuición: Notar que se quieren probar 2 inclusiones y una igualdad. Para esta última se debe tener en cuenta que la forma tradicional de trabajarla es con una doble inclusión.
También que este método es tomar un elemento arbitrario en el conjunto más pequeño y probar que debe estar en el conjunto más grande, como una especie de condición.
b) Teoría:Manejar bien la caracterización de inclusión a través de proposiciones lógicas será importante para este ejercicio, además de tener clara la definición de un conjunto potencia y el tipo de elementos que posee para trabajar el problema.
¿La inclusión como relación, cumple transitividad?
Recordar que una implicancia tiene la gracia de poder probar las cosas mediante contradicción.
c) Matraca: Para los 3 casos realizando el método descrito y correcto uso de las propiedades, esta parte no debería ser tan extensa.

Solución P4

I) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
Como debemos probar una doble implicancia veremos ambas con argumentos similares. Para el desarrollo que continúa proposiciones compuestas de la forma $p \Rightarrow q$, a p se le llamará hipótesis, y a q se le llamará tesis.

(⇒)
Para la implicancia a la derecha se tomará como hipótesis $A \subseteq B$ y se probará $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
Como es usual en demostraciones de inclusiones, se tomará un elemento arbitrario en $\mathcal{P}(A)$ y se probará que debe estar en $\mathcal{P}(B)$.
Sea $x \in \mathcal{P}(A)$(ojo que es elemento de las partes por lo que es un conjunto) lo cual por su definición vista en clases $\Leftrightarrow x \subseteq A$, por definición del conjunto potencia. Luego recordando la hipótesis $A \subseteq B$ tenemos que $x \subseteq A \subseteq B$, luego por transitividad de la inclusión como relación de orden.$\Rightarrow x \subseteq B \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(B)$, Esto por la equivalencia de la defínción del conjunto potencia.
Tomamos un elemento en el conjunto potencia de A y probamos que necesariamente debía estar en el conjunto potencia de B.
∴P(A)$\subseteq \mathcal{P}(B)$

($\Leftarrow$)
Ahora nuestra hipótesis será $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, es decir la implicancia a la izquierda. Debemos probar que $A \subseteq B$.
Sabemos que toda igualdad de conjuntos es equivalente a una doble inclusión de los conjuntos, por lo que por $A = A \Leftrightarrow A \subseteq A$, luego que un posible subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ es el mismo conjunto A, pues es un posible subconjunto de A.
Por otra parte $\forall x \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow x \in \mathcal{P}(B)$, Por la inclusión de la hipótesis. Basta tomar $x = A$, lo que se traduce en $A \in \mathcal{P}(B)$.
Por defínción de conjunto potencia esto equivale a AB. Lo que prueba la segunda implicancia.
$\therefore$A $\subseteq B$

Luego por tener ambas implicancias se tiene la equivalencia que se pide.
$\therefore$A$\subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

II) Sea $x \in \mathcal{P}(A \setminus B) \Leftrightarrow x \subseteq A \setminus B$ *donde*
(1) $\Leftrightarrow x \subseteq A \cap B^c \subseteq A \Rightarrow x \subseteq A$
(2) $\Leftrightarrow x \subseteq A \cap B^c \subseteq B^c \Rightarrow x \subseteq B^c$
Donde de (1) por definición de conjunto potencia se tiene $x \subseteq A \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A)$ (3)
Veamos como se comporta lo que quiero probar, es decir, un $x \in [((\mathcal{P}(A)) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}]$
$\Leftrightarrow x \in [(\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{P}(B)^c)) \cup \{\emptyset\}]$
$\Leftrightarrow [x \in (\mathcal{P}(A) \wedge x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x \in \{\emptyset\}]$ Por la parte (3) reemplazamos esto y ahora lo que queremos probar es equivalente a
$\Leftrightarrow [x \in (\mathcal{P}(A) \wedge x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x \in \{\emptyset\}]$
$\Leftrightarrow [(V \wedge x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x \in \{\emptyset\}]$
$\Leftrightarrow [x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x \in \{\emptyset\}]$ esto por lo dicho en parte (3) y dominancía de la conjunción con V.
Luego debemos estudiar 2 casos
Caso 1: $x \in \{\emptyset\} \Leftrightarrow x = \emptyset$

Lo cual se tiene de manera directa, pues coo se trata de una disyunción basta que una de las proposiciones sea verdadera para que toda la expresión sea verdadera, con esto no importa el valor de verdad de $x \notin \mathcal{P}(B)$
La expresión queda:

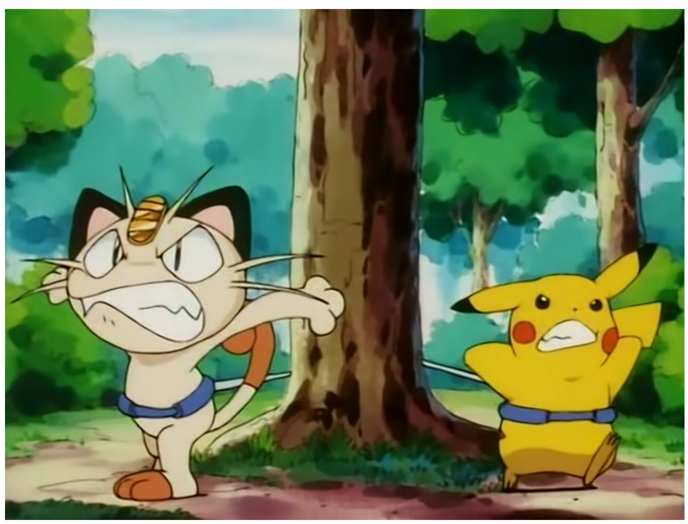
$\Leftrightarrow [x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x \in \{\emptyset\}]$, pero $x = \emptyset$
$\Leftrightarrow [x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x = \emptyset$
$\Leftrightarrow [x \notin \mathcal{P}(B)) \vee V \Leftrightarrow V$ Pues verdadero y cualquier cosa es Verdadero.
Caso 2: $x \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow [x \in (\mathcal{P}(A) \wedge x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x \in \{\emptyset\}]$
$\Leftrightarrow [(V \wedge x \notin \mathcal{P}(B)) \vee x = \emptyset]$
$\Leftrightarrow [(V \wedge x \notin \mathcal{P}(B)) \vee F]$
$\Leftrightarrow [(x \notin \mathcal{P}(B)) \vee F]$
$\Leftrightarrow x \notin \mathcal{P}(B)]$ Entonces para este caso basta probar esto. Supondremos por contradicción que $x \in \mathcal{P}(B)] \Leftrightarrow x \subseteq B \Leftrightarrow x \cap B^c = \emptyset$ (4), pero por (2) tenemos $x \subseteq B^c \Leftrightarrow x \cap B^c = x \neq \emptyset$ por enunciado, pero por (4) $x \cap B^c = \emptyset$
Lo que genera una contradicción $\Rightarrow\Leftarrow$, por lo que asumimos debe ser erróneo, es decir $\Leftrightarrow x \notin \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow$
Como vimos que para $x = \emptyset \vee x \neq \emptyset$ se cumple que es verdadera la expresión a probar dada la hipótesis entregada. $\therefore$ P(A$\setminus B) \subseteq (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$

III) PDQ. $\mathcal{P}(A) = \{A \cap X | X \in \mathcal{P}(E)\}$, siendo E el conjunto de referencia.
Para esto como es una igualdad procedemos por doble inclusión.
1)$\mathcal{P}(A) \subseteq \{A \cap X | X \in \mathcal{P}(E)\}$
Tomaremos un elemento en las partes de A, donde luego llegaremos a que es parte del conjunto de la derecha. Sea $B \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow B \subseteq A$, por defincíón de ser un elemento de las partes. En particular como B está contenido en A, se tiene lo siguiente $B = B \cap A$, ahora como B es parte del conjunto de referencia se tiene $B \subseteq E \Leftrightarrow B \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ por definición de estar en las partes, luego como el conjunto B era un conjunto arbitrario, podemos decir $\exists X = B \in \mathcal{P}(E), B = A \cap X$
2)$\{A \cap X | X \in \mathcal{P}(E)\} \subseteq \mathcal{P}(A)$
Sea $B \in \{A \cap X | X \in \mathcal{P}(E)\}$, un B arbitrario $\Rightarrow \exists X \in \mathcal{P}(A), B = A \cap X$, luego sabemos que toda intersección está contenida en alguno de los dos conjuntos, por lo tanto tenemos la siguiente inclusión donde usaremos la igualdad mencionada recién $A \cap X \subseteq A \Leftrightarrow [B \subseteq A]$ lo que equivale por definición de las partes de un conjunto $B \in \mathcal{P}(A)$
$\therefore \{A \cap X | X \in \mathcal{P}(E)\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

Por ambas inclusiones tenemos la igualdad de conjuntos.
$\mathcal{P}(A) = \{A \cap X | X \in \mathcal{P}(E)\}$

En lo que sigue, $E \neq \emptyset$ y $F \neq \emptyset$ denotan conjuntos de referencia.



P2. Sean $A, B \subseteq E$ y $C, D \subseteq F$.

a) Pruebe que $(E \setminus A) \times F = (E \times F) \setminus (A \times F)$.

b) Pruebe que $(A \setminus B) \times (C \setminus D) \subseteq (A \times C) \setminus (B \times D)$. Muestre, con un contraejemplo, que no se tiene la igualdad.

c) Pruebe que $A \neq \emptyset \wedge A \times C = A \times D \implies C = D$.

a) Pruebe que $(E \setminus A) \times F = (E \times F) \setminus (A \times F)$.
Desarrollo análogo coordenada a coordenada a parte b!!

b) Pruebe que $(A \setminus B) \times (C \setminus D) \subseteq (A \times C) \setminus (B \times D)$. Muestre, con un contraejemplo, que no se tiene la igualdad.
Tomaremos $(a, b) \in (A \setminus B) \times (C \setminus D)$ lo que equivale a que $a \in A \wedge a \notin B \wedge b \in C \wedge b \notin D$ lo que equivale por coordenada a coordenada $(a, b) \in (A \times C) \wedge (a, b) \notin (B \times D)$ Por lo que se tiene la inclusión.
Para el contra ejemplo, pensar en un conjunto finito que tengan elementos en comunes algunos de los conjuntos, esto les será de mucha ayuda, y como dato un conjunto de hasta 2 elementos ya sirve, pues quiero ver un contraejemplo, con lo que si un caso falla no es válida la inclusión para todas.

c) Pruebe que $A \neq \emptyset \wedge A \times C = A \times D \implies C = D$.
Tenemos que probar una igualdad por lo que lo haremos por doble inclusión, pero trabajando los casos en que C es vacío o no.
Supongamos $C = \emptyset$ como sabemos que $A \neq \emptyset$ y además que un producto con un conjunto vacío es vacío deducimos $A \times C = \emptyset = A \times D$ luego tenemos que $D = \emptyset$ porque A es no vacío.
Luego supongamos $C \neq \emptyset$

PDQ $C = D \Leftrightarrow C \subseteq D \wedge D \subseteq C$
Vamos con la primera inclusión, sea $x \in C \wedge y \in A$ luego el par ordenado $(x, y) \in A \times C = A \times D$, por hipótesis, lo que quiere decir que cada elemento vive coordenada a coordenada respectivamente por lo que $x \in D$
Vamos con la inclusión pendiente sea $x \in D \wedge y \in A$ luego el par ordenado $(x, y) \in A \times D = A \times C$, por hipótesis, lo que quiere decir que cada elemento vive coordenada a coordenada respectivamente por lo que $x \in C$
Tomar en cuenta que x, y son arbitrarios y variables mudas.
$\therefore C = D$

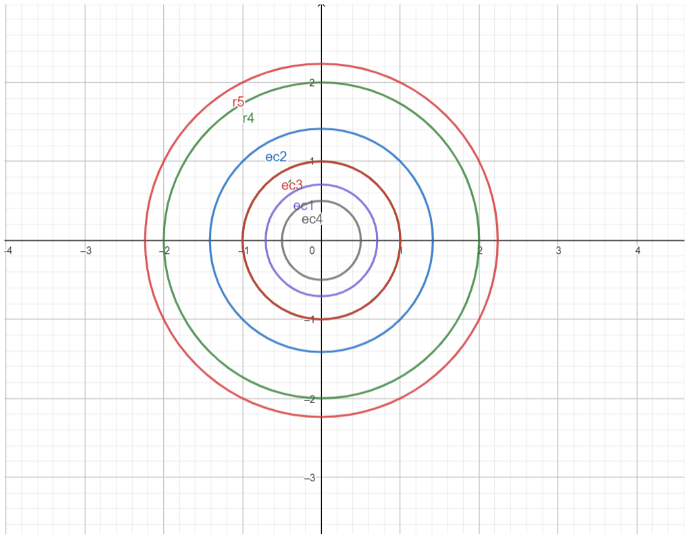
P3. **[¿Partición de Circunferencias?]**
Sea $r \in \mathbb{R}$. Definimos el conjunto

$$A_r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

a) ¿Es el conjunto $\mathcal{S} = \{A_r : r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\}$ una partición de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?
Respuesta: ¿Es realmente una partición? Recordemos la definición que debe cumplir
$\mathcal{G} \subseteq P(A)$ es partición de A si se cumple:

1) $\forall C \in \mathcal{G}, C \neq \emptyset$
2) Los elementos de $\mathcal{G}$, son disjuntos de a pares, es decir, $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{G}$, si $C_1 \neq C_2$, entonces $C_1 \cap C_2 = \emptyset$
3) $\mathcal{G}$ cubre a A, es decir, $\bigcup_{C \in \mathcal{G}} C = A$

Idea: Si vamos moviendo el r.ª través de $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ tendríamos algo así:



Es decir, podemos cubrir todo el plano que es $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, con circunferencias (3er punto), además veamos que estas no se tocan, podremos cumplir la calidad de disjunta. Por lo que todo apaña para poder decir que $S = \cup_{r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}} A_r$ es partición así que demostrémoslo.
$\boxed{\text{PDQ:}}$ $S := \{A_r : r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\}$ es partición de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
Debemos probar:
Llamaremos por facilidad $V := \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

1) $\forall X \in S, X \neq \emptyset$
Notemos que $S = \{A_r | r \in V\} = \cup_{r \in V} \{A_r\}$
Donode los elementos de la unión don los conjuntos A_r.
Luego sea $X \in S$ arbitrario $\Rightarrow X \in S \Leftrightarrow X \in \cup_{r \in V}\{A_r\} \Rightarrow \exists \gamma \in V, X \in \{A_\gamma\} \Rightarrow X = A_\gamma$, pues solo hay un elemento, $\Rightarrow X = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = \gamma^2\}$ y en este conjunto vive por ejemplo el par $(0, \gamma)$ ya que cumple $x^2 + y^2 = 0^2 + \gamma^2 = \gamma^2$, es decir $(0, \gamma)$ está en la circunferencia, luego $X \neq 0$ ya que fue arbitrario.
2) Los elementos de S, son disjuntos de a pares, es decir, $\forall X_1, X_2 \in S$, si $X_1 \neq X_2$, entonces $X_1 \cap X_2 = \emptyset$
Supongamos por contradicción que $\exists X_1, X_2 \in S, X_1 \neq X_2 \wedge X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ Donde tomé la implicancia a probar, usé caracterización de la implicancia , luego lo negué.
Además digamos como $X_1 \in S \Leftrightarrow X_1 \in \cup_{r \in V}\{A_r\} \Rightarrow \exists \phi \in \mathbb{R}, X_1 \in \{A_\phi\}$ pues es el único elemento.
Análogamente, $\exists p \in \mathbb{R}, X_2 \in \{A_p\} \Rightarrow X_2 = A_p$ Luego tenemos:
$\exists X_1, X_2 \in S, X_1 \neq X_2 \wedge X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, donde con los nuevos conjuntos definiremos como primer y segunda hipótesis.
$A_\phi \neq A_p \wedge A_\phi \cap A_p \neq \emptyset$ Luego como la intersección es no vacía , podemos decir que existe un par ordenado que está en ambos conjuntos, lo que se traduce en $\exists (a, b) \in A_\phi, A_p$ de tal manera que deben cumplir la ecuación

$$a^2 + b^2 = \phi^2 \wedge a^2 \wedge a^2 + b^2 = p^2$$

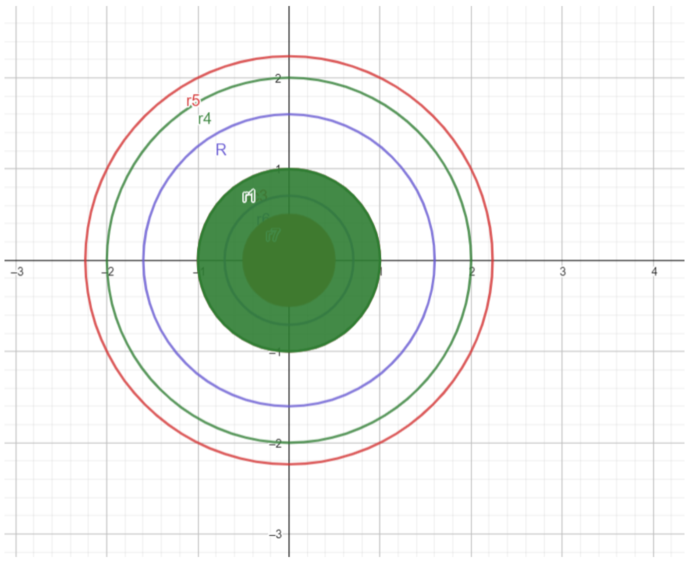
Luego viendo las solución llegamos a que $\phi = \pm p$, pero el valor negativo queda descartado por lógica, y el positivo induce a que los conjuntos son iguales, lo que se contradice con la hipótesis 1 que habíamos dicho $A_\phi \neq A_p$, por lo que $\forall X_1, X_2 \in S, X_1 \neq X_2 \Rightarrow X_1 \cap X_2 = \emptyset$
3) S cubre a A, es decir, $\bigcup_{X \in S} X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$\boxed{\subseteq}$ Sea $(x, y) \in \cup_{X \in S} X \Leftrightarrow (x, y) \in \cup_{r \in V} A_r \Rightarrow \exists \phi \in V, (x, y) \in A_\phi \Rightarrow (x, y) \in A_\phi$ y como

$A_\phi \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x,y) \in R^2$
$\therefore \cup_{x\in S} X \subseteq R^2$
$\boxed{\supseteq}$ Sea $(a,b)\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ arbitrario, luego podemos tomar $= \sqrt{a^2+b^2}$ y luego $(a,b) \in A_\phi$ y además A_ϕ participa en $\cup_{r\in V} A_r \Rightarrow (a,b) \in \cup_{r\in V} A_r$ y como era arbitrario tenemos.

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \subseteq \cup_{r\in V} A_r = \cup_{x\in S} X$$

$\therefore Sespartición.$

b) ¿que ocurre si en vez de el conjunto de circunferencias tomamos el conjunto de círculos? es decir si en vez de A_r fuese $C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2+y^2 \leq r^2\}$
Basta ver que si no fueran circunferencias y fueran círculos se intersectarían de la siguiente manera:



Con lo que pierden su calidad de disjuntos y no son partición.

PROPUESTOS

P4. ***[ ]Particiones***

a) Sea $\mathcal{C}$ una partición de un conjunto B. Sea $A \subseteq B$ subconjunto, se define $\mathcal{C}_A := \{C \cap A \mid C \in \mathcal{C}, C \cap A \neq \emptyset\}$. Pruebe que $\mathcal{C}_A$ es una partición de A.

b) Dado $n \in \mathbb{R}$ define el siguiente conjunto en $\mathbb{R}^2$:

$$L_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + n\}$$

Pruebe que $\mathcal{C} = \{L_n \mid n \in \mathbb{R}\}$ es partición del plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$).

c) Encuentre una partición para la mitad superior del plano cartesiano, es decir para:

$$\Pi_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

1. Intuición:
2. Teoría:
3. Matraca:

P5. ***Precalentamiento***

a) Se define la función $f : [1, 2] \longrightarrow [1, \infty)$ por $f(x) = x^4 + 2$ Estudie inyectividad, epiyectividad, biyectividad de f y - en caso de ser biyectiva - encuentre su inversa.

b) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ se define la función $f : \mathbb{R}\backslash\{\frac{-b}{a}\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{\frac{c}{a}\}$ por:

$$f(x) = \frac{cx}{ax + b}$$

Estudie inyectividad, epiyectividad, biyectividad de f y - en caso de ser biyectiva - encuentre su inversa.

P6. ***Función unión e intersección***

Sea $A \subseteq E$ se definen las funciones $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ y $g : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ por:

$$f(X) = A \cap X, \qquad g(X) = A \cup X$$

a) Demuestre que f es inyectiva $\Leftrightarrow A = E \Leftrightarrow f$ es epiyectiva

b) Demuestre que g es inyectiva $\Leftrightarrow A = \emptyset \Leftrightarrow g$ es epiyectiva.

P7. ***Dos en uno***

Sean $f : A \to C$ y $g : B \to D$ funciones. Se define $h : A \times B \to C \times D$ de modo que

$$h(a, b) = (f(a), g(b))$$

Pruebe que:

$$h \text{ es inyectiva (epiyectiva)} \Leftrightarrow f, g \text{ son inyectivas (epiyectivas)}$$

"Nos esforzamos por emplear solo figuras simétricas, que no solo deberían ser una ayuda para el razonamiento, a través del sentido de la vista, sino que también deberían ser hasta cierto punto elegantes en sí mismas."
John Venn