

MA1101-6 Introducción al Álgebra 2023

Profesora: Leonardo Sánchez.

Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón

Correo: pyanez@dim.uchile.cl



Auxiliar 03: Conjuntos

Resumen

- [Nociones básicas]:
 - **Conjunto Referencia:** Es el conjunto al cual pertenecen todos los elementos con los que se va a trabajar. Si denotamos E al conjunto de referencia, tenemos que $x \in E$ es siempre verdad.
 - **Conjunto vacío:** Se define el conjunto $\emptyset$ como el conjunto que no posee elementos, es decir $x \in \emptyset$ es siempre falso.
- [Definiciones Básicas]: Sean A y B conjuntos, se define:
 - **Igualdad:**
 $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
 - **Inclusión:**
 $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B)$
 - **Unión:**
 $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
 - **Intersección:**
 $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
 - **Complemento:**
 $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$
 - **Diferencia:**
 $A \setminus B := A \cap B^c$
 - **Diferencia simétrica:**
 $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- [Propiedades de inclusión]: Sean $A, B, C, D \subseteq E$ conjuntos:
 - a) $\emptyset \subseteq A \subseteq E$
 - b) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
 - c) Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$ entonces $A \cap B \subseteq C \cap D$ y $A \cup B \subseteq C \cup D$
- [Propiedades de igualdad]: Sean $A, B \subseteq E$ conjuntos:
 - a) $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
 - b) $A \cup E = E, \quad A \cap E = A$
 - c) $(A^c)^c = A, \quad A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = E$
 - d) **Ley de De Morgan**
 - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- [Equivalencias útiles]: Son equivalentes:
 - I) $A \subseteq B$
 - II) $B^c \subseteq A^c$
 - III) $A \cap B^c = \emptyset$
 - IV) $B \cup A^c = E$

P1. [MÓDULO COMÚN]Pisando terreno

Sean A, B y C tres conjuntos. En la columna de la izquierda de la tabla que se muestra a continuación, se enuncian propiedades de pertenencia en lenguaje corriente. Complete, en la columna de la derecha, la propiedad correspondiente escrita en notación conjuntista, escribiendo una expresión de la forma " $x \in D$ ", donde D es lo que debe determinar. Se escribe la primera como ejemplo.

En lenguaje corriente	Notación conjuntista
x no pertenece a A	$x \in A^c$
x pertenece a C o a B	
x pertenece a A pero no a C	
x pertenece a los tres conjuntos	
x pertenece a alguno de los conjuntos	
x no pertenece a ninguno de los tres conjuntos	
x no pertenece a A pero sí a alguno de los otros	
x pertenece a lo más a uno de los conjuntos	
x pertenece exactamente a dos conjuntos	

Para este primer ejercicio no será dividido en las 3 áreas que siempre separamos, esto porque solo es un ejercicios de cambiar del lenguaje escrito a conjuntista, desarrollando la lógica proposicional a través de las armas que tenemos en conjuntos, en este caso la pertenencia.

P2. [MÓDULO PROPIO]Inclusión de conjuntos

Sean $A, B, C, D \subseteq E$ conjuntos. Demuestre que:

- $A \cap B \subset C \Rightarrow A \cap C^c \subseteq B^c$
- $(B \setminus A) \subseteq C \Rightarrow (D \setminus C) \subseteq (D \setminus B) \cup (D \cap A)$
- Propuesto:** $(A \cap D) \subseteq (B \cap D) \wedge (A \cap D^c) \subseteq (B \cap D^c) \implies A \subseteq B$

- Intuición: Como se trata de querer probar inclusiones, en este caso debemos tener como intuición que el conducto regular es tomar un elemento en el primer conjuntos y probar que este vive en el siguiente! Ojo que este elemento debe ser arbitrario para el conjunto, Ahora también tomar en cuenta que lo que nos pide probar es implicancias, por lo que el lado izquierdo de cada inciso será nuestra hipótesis.
- Teoría: Saber que la caracterización de la inclusión se puede expresar a través de los conectivos de pertenencia y una implicancia. Además tener muy claro como funcionan las propiedades de conjuntos de la página 40 de apunte, se recomienda demostrar esto antes de comenzar con los ejercicios.
- Matraca:
 - Darte la hipótesis y notar que tendré formas equivalentes de escribir esta inclusión, una de estas me será más conveniente porque se asemeja más a lo que quiero probar
 - Transformar todo a operaciones más elementales tales como unión e intersecciones, repetir los pasos anteriores, pero esta vez notar que tenemos el conjunto D de manera adicional ¿Puedo intersectarlo a ambos lados de la inclusión? esto es una equivalencia o implicancia?

P3. [MÓDULO PROPIO] Igualdad de conjuntos

Sean $A, B, C, \subseteq E$ conjuntos. Demuestre que:

1. $A \cap C = \emptyset \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
2. $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$
3. **Propuesto:** $A \subseteq C \Rightarrow A \setminus B = C \setminus (B \cup (C \setminus A))$

- a) Intuición: Para este tipo de problemas en donde debemos probar una igualdad, la doble inclusión será el arma fundamental y luego usar las tácticas del item anterior
- b) Teoría: Capítulo 3 del apunte, pero en si manejar bien las caracterizaciones de la inclusión, igualdad y propiedades de la página 40.
- c) Matraca:
 - 1) Se recomienda desarrollar las expresiones hasta llegar a algunas más elementales, una vez con esto poder trabajar, notar que tengo una hipótesis que usar en el desarrollo!
Que además en este caso particular puedo trabajar a través de puras igualdades y no es necesario hacer la doble inclusión.
 - 2) Para este caso hay que probar una equivalencia, por lo que se debe caracterizar en la doble implicancia para poder probarlo.
Para este caso si es necesario hacer la doble inclusión (en la implicancia a la izquierda), caracterización de la igualdad de conjuntos. La implicancia a la derecha debería salir relativamente rápido escribiendo de buena manera el conjunto durante el trayecto, notar que todo conjuntos es igual a la unión de el con el mismo conjunto, y que ocurre lo mismo para la intersección.
Para la implicancia a la izquierda debemos probar la inclusión de cada conjunto en el otro (los únicos 2 que aparecen), Hay que notar que el nombre de los conjuntos A y B son mudos en este caso, porque cumplen las mismas propiedades, por lo que será análogo probar la inclusión de A en B y la de B en A.
Tomando mi hipótesis debo ver como poder formar lo que quiero probar, entonces me puede ser conveniente escribir de manera conveniente la inclusión que quiero probar con las prop de la pág 40, luego para formar esto intersectar algo conveniente, ¿ qué puede ser?

PROPUESTOS:**P4. (Propuesto:) [MÓDULO COMÚN] Imaginación**

Sean A, B y C tres conjuntos. Analice el valor de verdad de las siguientes igualdades. Las que sean verdaderas, demuéstrelas y para las que sean falsas, entregue un contraejemplo.

- a) $A \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$.
- b) $A \Delta (B \cup C) = (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$.
- c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

- a) Intuición: Dibujar
- b) Teoría: Definición de diferencia y diferencia simétrica, métodos de demostración
- c) Matraca: Ver caso a caso

P5. (Propuesto:) [MÓDULO COMÚN] Clásico controles

Sean A y B dos conjuntos.

- a) Demuestre que

$$A \cap B = \emptyset \iff (A \cup B) \setminus B = A.$$

b) Encuentre un conjunto X que verifique las siguientes igualdades:

$$A \cup X = A \cup B \wedge A \cap X = \emptyset.$$

c) ¿Existe un único conjunto X que satisface las igualdades precedentes?

Este ejercicio es clásico de controles, para la primera parte se debe separar en una doble implicancia, donde la que me entrega mayor información puede ser buena idea atacarla por contradicción dado que la tesis que quiero llegar está de una forma particular.

Para trabajar la otra, es recomendable escribir ahora la hipótesis de manera conveniente como en los problemas pasados.

Para la parte B, notar que el tipo que me piden debe no tener elementos de A por la segunda condición, pero si tener elementos de B por la primera condición, allí podemos darnos un candidato y probarlo por inspección!

Para la última parte, notar que me piden probar la unicidad de un candidato, por lo que comenzar por contradicción puede ser una buena opción, asumir que hay 2 distintos y llegar a que son iguales, pero también puede ser una buena opción ver una variante de como denotar a través de una propiedad la unicidad de elementos, pensar en introducción al cálculo, se que el inverso multiplicativo de cada número es único, y se que es el porque me cumple una propiedad particular,

P6. (Propuesto:) Conjunto de conjuntos

Sea $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$. Se define $\mathcal{F}_A$ por:

$$\mathcal{F}_A = \{X \subseteq E \mid X \cap A \neq \emptyset\}$$

Demuestre que dado $B \subseteq E$:

- a) $E \in \mathcal{F}_A \wedge A \in \mathcal{F}_A$
- b) $A \setminus B \neq \emptyset \implies B^c \in \mathcal{F}_A$
- c) $B \in \mathcal{F}_A \wedge C \subseteq E \implies B \cup C$
- d) Si $A \subseteq B \cap C$, verifique que $B \in \mathcal{F}_A$ y $C \in \mathcal{F}_A$ pero $B \triangle C \notin \mathcal{F}_A$

La intuición haga lo suyo, esto me tinca algo de conjuntos, intersección no vacía, una posible contradicción e implicancias, entonces la teoría por detrás es muy clara la propiedades de la página 40 del apunte, los métodos de demostración de implicancias, y la contradicción como forma de atacar.

Luego a eso la parte a) ve cómo te definen los elementos de $\mathcal{F}_A$, la primera condición es que esté en el espacio la cual es mínima para que exista el conjunto, la segunda es la qué hay que justificar, ahí te recomiendo centrarte!

Parte b) aplicar todas las definiciones posibles para simplificar todo, y manos a la obra tienes tu hipótesis y lo que quieres probar, ahora ve esquemáticamente que quiere decir cada cosa, y probar la pertenencia es ver que cumple sus condiciones o su buena contradicción

c) jeje me faltó poner $B \cup C$ pertenece a $\mathcal{F}_A$ (misma recomendación anterior)

d) ve caso a caso con las recomendaciones anteriores, ojo que son conjunciones ahora

“«El trabajo tesonero todo lo vence» (latín: «Labor Improbus Omnia Vicint»)»

...