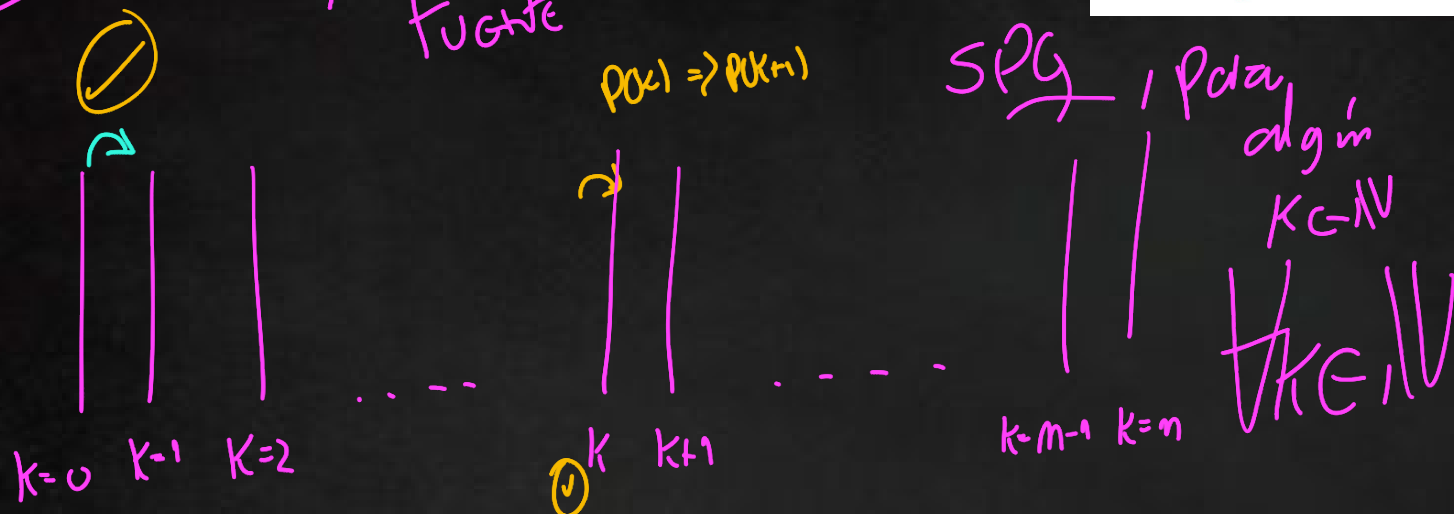


Inducción, Inducción Fuerte



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



CB

$$P_0 \Rightarrow V$$

HI

SIN pérdida de generalidad, Para

PI

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

$$V \Rightarrow V$$

$$24 = 6 \cdot 4$$

(arbitrario)

Para algún $k \in \mathbb{N}$

$$P(k) \Rightarrow V$$

$$1) \forall m \in \mathbb{N}, m(m+1)(m+2) \text{ múltiplo de } 6$$

$$CB \mid m=0, 0(0+1)(0+2) = 0 = 6 \cdot l, l=0$$

HI SIN pérdida de generalidad
Para algún $k \in \mathbb{N}$, arbitrario } Palabras mágicas

$$P(k) \Rightarrow V$$

$$k(k+1)(k+2) = 6l, l \in \mathbb{N}$$

Asumo que $P(k) \Rightarrow V$

PI $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

↓

$$k(k+1)(k+2) = 6l \Rightarrow (k+1)(k+2)(k+3) = \underline{6\bar{l}}, \bar{l} \in \mathbb{Z}$$

$$l \in \mathbb{Z}$$

✓

$\Rightarrow$

lo que quiero

$$[(k+1)(k+2)](k+3) = \dots = 6\bar{l}$$

$$= \underbrace{(k+1)(k+2)k}_{HI} + (k+1)(k+2)3$$

$$= 6l + 3 \underbrace{(k+1)(k+2)}_{*} = 6\bar{l}, \quad * (k+1)(k+2) = 2m$$

$$= 6l + 3 \cdot 2m$$

$$= 6l + 6m = 6(\underline{l+m})$$

$$= 6\bar{l} \quad \bar{l} \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore P'PI \quad k(k+1)(k+2) = 6l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Probaremos esto
con otra inducción

PDQ $(k+1)(k+2) = 2m, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

CB $k=0, \quad (0+1)(0+2) = 2 = 2 \cdot 1$ ✓

HI Sin pérdida de generalidad (SPG)
Para algún $k \in \mathbb{N}$ arbitrario

$$q(k) \Leftrightarrow V$$

$$(k+1)(k+2) = 2m, \quad m \in \mathbb{Z}$$



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

PI $q(k+1) \Rightarrow V$

$$(k+2)(k+3) = \dots = \dots = 2\bar{m}, \bar{m} \in \mathbb{Z}$$

$$= (k+2) \overbrace{((k+1)+2)}$$

$$= \underbrace{(k+2)(k+1)}_{HI} + 2(k+2)$$

$$= 2\bar{m} + 2(k+2) = 2(\underbrace{\bar{m} + k + 2}_{\bar{m} \in \mathbb{Z}})$$

Por Principio Inducción
 $\therefore$ PPI $(k+1)(k+2) = 2\bar{m}, \bar{m} \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}$
Problemas ✱

Inducción $\rightarrow$ Igualdad / Divisibilidad ($=$)

$\rightarrow$ Desigualdad

$\rightarrow$ Recurrencia

$$\begin{matrix} > & \geq \\ < & \leq \end{matrix}$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

2) $\forall m \in \mathbb{N}, m(m+1)(m+2)(m+3)$ es divisible por 24

$$\begin{array}{l} 6 \mid 3 \\ 6 = 3 \cdot 2 \end{array} \quad |$$



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

PDQ

$$m(m+1)(m+2)(m+3) = 24l, \quad \forall m \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}$$



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

CP | $m=0$

$$0(0+1)(0+2)(0+3) = 24 \cdot l, \quad l=0, \quad l \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

HI | SPG, para algún $k \in \mathbb{N}$, arbitrario

$$P(k) \Rightarrow V$$

$$k(k+1)(k+2)(k+3) = 24l, \quad l \in \mathbb{Z} \Rightarrow \checkmark$$

PI | $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

PDQ

$$k(k+1)(k+2)(k+3) = 24l \Rightarrow \underbrace{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}_{\text{PDQ}} = 24\bar{l}$$

HI

$\Rightarrow$

PDQ

$$[(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)] = \dots = \dots \quad (24\bar{l})$$

$$= \underbrace{k(k+1)(k+2)(k+3)}_{24l} + 4(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= 24l + 4 \underbrace{(k+1)(k+2)(k+3)}_{6 \cdot j, j \in \mathbb{Z}} \quad (\text{es el ejercicio anterior})$$

$$= 24l + 4 \cdot 6j = 24(l+j), \quad \text{ppI se sigue} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$\bar{l} \in \mathbb{Z}$

3) $\forall m \in \mathbb{N}, a^{2^m} - 1$ es múltiplo de 2^{m+1}

$\Rightarrow a$ Impar

$$24 = 6 \cdot 4$$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, a^{2^m} - 1 = 2^{m+1} \cdot l \Rightarrow a$ Impar

CB $\Rightarrow$

CB $\xrightarrow{\text{PDG}}$

a Impar $\Rightarrow$

$$a^{2^m} - 1 = 2^{m+1} \cdot l, l \in \mathbb{Z}$$

$$a = 2j + 1, j \in \mathbb{N} \quad \uparrow \text{Hipótesis}$$

$$a^{2^m} - 1 = 2^{m+1} \cdot l, l \in \mathbb{Z}$$

Probaremos
esta igualdad por
inducción $\forall m \in \mathbb{N}$

Como voy a usar inducción

CB

$m=0$

$$a^{2^0} - 1$$

$$= 2^{0+1} \cdot l$$

lo que quiero

$$a^1 - 1$$

$$= a - 1$$

$$a = 2j + 1$$

$$= 2j + 1 - 1$$

$$= 2j = 2 \cdot l, j = l, l \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

HI SPG Para algún $m \in \mathbb{N}$ arbitrario



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$2^{(2^m)} - 1 = 2^{m+1} \cdot m, m \in \mathbb{N} \leftarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{(2^m)} = 2^{m+1} \cdot m + 1$$

$$P(m) \Leftrightarrow V$$

PI Asumiendo $P(m) \Leftrightarrow V \Rightarrow P(m+1) \Leftrightarrow V$

$$2^{(2^m)} - 1 = 2^{m+1} \cdot m \Rightarrow 2^{(2^{m+1})} - 1 = 2^{m+2} \cdot \bar{m}$$

$$\Leftrightarrow P(m+1)$$

$$2^{(2^{m+1})} - 1 = \dots = \dots = 2^{m+2} \cdot \bar{m}$$

$$2^{(2^{m+1})} - 1 = 2^{2^m \cdot 2^1} - 1 = \underbrace{(2^{2^m})^2}_{\text{Hipótesis inductiva}} - 1$$

$$a^{b \cdot 2} = (a^b)^2$$

$$= \left(\underbrace{2^{m+1} \cdot m}_{a} + \underbrace{1}_{b} \right)^2 - 1^2 \quad \downarrow \quad \text{Hipótesis inductiva}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= (2^{m+1} \cdot m)^2 + 2 \cdot 2^{m+1} \cdot m \cdot 1 + \cancel{1^2} - \cancel{1}$$

$$= 2^{m+1} \cdot 2^{m+1} \cdot m^2 + 2^{m+2} \cdot m$$

$$= \underbrace{2^{m+1} \cdot 2 \cdot 2^m \cdot m^2}_{2^{m+2} \cdot m^2} + 2^{m+2} \cdot m$$

$$= 2^{m+2} [2^m m^2 + m]$$

$$\bar{m} \in \mathbb{N}$$

$$= 2^{m+2} \cdot \bar{m} \in \mathbb{N} \quad \text{PPII} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Haremos la otra implicancia.

$$2^{2^m} - 1 = 2^{m+1} \cdot l \Rightarrow a = 2j+1,$$

$l \in \mathbb{Z} \qquad j \in \mathbb{N}$

$$p \Rightarrow q$$

$$(V) \Rightarrow (F)$$

p	q	p $\Rightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Contradicción

Tomar $p \Rightarrow V$

$$2^{2^m} - 1 = 2^{m+1} \cdot l$$

$$= 2 \cdot 2^m \cdot l \rightarrow \text{PAR}$$

$q \Rightarrow F$

$$2^{2^m} = 2^1 \cdot 2^{2^m-1}$$

a No es Impar $\Rightarrow a$ es par

$$* a = 2 \cdot j, j \in \mathbb{N}$$

$$\# (ab)^k = a^k b^k$$

$$(2 \cdot j)^{2^m} = 2^{2^m} \cdot j^{2^m}$$

Tomar $a^{2^m} - 1 = (2 \cdot j)^{2^m} - 1$

$$= 2^{2^m} \cdot j^{2^m} - 1$$

$$\text{IMPAR} = 2 \cdot (2^{2^m-1} \cdot j^{2^m}) - 1$$

$p \Rightarrow V$ $2^{2^m} - 1 = 2 \cdot 2^m \cdot l$ PAR



$$a^m \cdot b = a a^{m-1} \cdot b$$

termina PPI,

10 minutos, busquen t'c, café
y suben foto

Nos vemos en 10 minutos

A la Vuelta 20:08 volvemos!
Inducción con recurrencia

Inducción $\Rightarrow$ Inducción Fugate

$$f_{m+2} = f_m + f_{m+1}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$



CB

HI

PI

SPG, Para todo $k \leq K$
 $P(k)$

$P(k) \Rightarrow V$
 $k \leq K$

$k=1$ $k=2$

...

$k-1$
 k

...

$m-2$ $m-1$ m

Sea $a \geq b, a, b \in \mathbb{N}$

f_n define recursivamente

(1) $f_0 = 2$

(2) $f_1 = 2a, a \in \mathbb{N}$

(3) $f_{n+2} = a f_{n+1} + b f_n \rightarrow$

(*) $a \geq b$

Propiedades que tengo.

POQ

$f_n \geq a^n + b^n$

Lo primero es ver que todo este bien definido
Como $f_{n+2} = a f_{n+1} + b f_n$ está definido recursivamente
a través de sumas y productos de naturales
tenemos certeza para los naturales

$a f_{n+1} \geq 0, b f_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Ahora probemos por inducción, POQ $f_n \geq a^n + b^n$

Caso base

$f_0 \geq a^0 + b^0 = 1 + 1 = 2 = f_0$

$f_0 \geq 2, f_0 = 2$ ✓

HI SPQ, para algún $k \in \mathbb{N}$ arbitrario
 $P(k) \Leftrightarrow \forall$

$f_k \geq a^k + b^k \Leftrightarrow$ ✓

$7 \geq 6 \geq 3 \geq 1 > 0$

$7 > 0$



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$P \vdash$ | PDG $P(k+1) \Rightarrow V$
 $\Rightarrow f_{k+1} \geq a^{k+1} + b^{k+1}$

$$f_{k+1} \geq a^{k+1} + b^{k+1}$$

$$f_k \geq a^k + b^k \quad \leftarrow$$

$$\begin{aligned}
 f_{k+1} &\stackrel{\text{def}}{=} a \underbrace{f_k}_{\in \mathbb{N}} + b \underbrace{f_{k-1}}_{\in \mathbb{N}} \geq a(a^k + b^k) + \underbrace{b f_{k-1}}_{\substack{\geq 0 \\ \downarrow}} \geq a(a^k + b^k) \\
 &= a^{k+1} + a b^k \geq a^{k+1} + b^{k+1} \quad \text{H.I.}
 \end{aligned}$$

$$* \quad a \geq b \quad / \cdot b^k$$

$$\begin{aligned}
 a b^k &\geq b b^k \\
 \underbrace{a b^k}_{\geq} &\geq \underbrace{b^{k+1}}_{\geq}
 \end{aligned}$$

s: lo
 habiam usado
 por def.
 debiam hacer
 I.F.

$$x \geq 2$$

$\forall n: \text{MO.}$

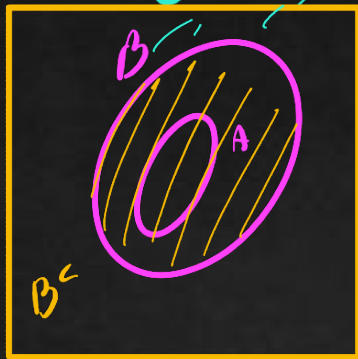
$$\begin{aligned}
 f_k &\geq 4 \cdot x + 3 \geq 4 \cdot 2 + 3 \\
 &\geq 4 \cdot 2 + 3 \quad \uparrow
 \end{aligned}$$

$$4x + 3 \geq 4x$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f_{k+1} &\geq a^{k+1} + b^{k+1} \quad \Rightarrow P(k+1) \Rightarrow V \\
 \therefore P \vdash, \forall k \in \mathbb{N} \quad &f_k \geq a^k + b^k
 \end{aligned}$$

Conjuntos

Apuntes:



E

Equivalentes

i) $A \subseteq B$

ii) $B^c \subseteq A^c$

iii) $A \cap B^c = \emptyset$

iv) $B \cup A^c = E \rightarrow$ conjunto universo

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

i) PDQ

$(A \cap B) \subseteq C \Rightarrow A \cap C^c \subseteq B^c$

i) $X \subseteq Y$

ii) $Y^c \subseteq X^c$

$A \cap B \subseteq C$

$\Rightarrow C^c \subseteq (A \cap B)^c$ Margem

$\Rightarrow C^c \subseteq A^c \cup B^c$ / $\cap A$

$\Rightarrow (A \cap C^c) \subseteq A \cap (A^c \cup B^c)$

$\Rightarrow A \cap C^c \subseteq (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)$

$\Rightarrow A \cap C^c \subseteq \emptyset \cup (A \cap B^c)$

$\Rightarrow A \cap C^c \subseteq A \cap B^c \subseteq B^c$

$X \cap B^c \subseteq B^c$

$A \cap C^c \subseteq B^c$

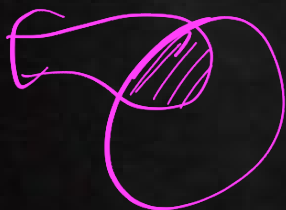
$\downarrow$ Distributiva

$\downarrow$ $\emptyset$ absorvo

$\downarrow$ $\emptyset$ neutro $\cup$

por transitividade

$\subseteq$



$$2) A \cap C = \emptyset \Rightarrow (A|B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C) \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{2}$$



fcm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad (A|B) \setminus C &= (A \cap B^c) \setminus C \quad \downarrow \text{def de diferencia} \rightarrow X \setminus Y = X \cap Y^c \\ &= (A \cap B^c) \cap C^c \\ &= A \cap B^c \cap C^c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad A \setminus (B \setminus C) &\stackrel{\text{def}}{=} A \setminus (B \cap C^c) \\ &= A \cap (B \cap C^c)^c \quad \downarrow \text{Molgen} \\ &= A \cap (B^c \cup (C^c)^c) \quad \downarrow (X^c)^c = X \\ &= A \cap (B^c \cup C) \end{aligned}$$

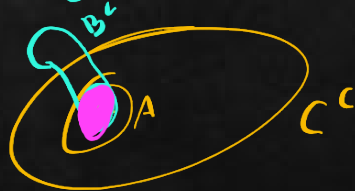
$$2) A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap B^c \cap C^c = A \cap (B^c \cup C) \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{2}$$

Comenzamos $\textcircled{2}$

$$\begin{aligned} A \cap (B^c \cup C) &\quad \downarrow \text{distributiva} \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \quad \text{Hipótesis} \\ &\quad \underbrace{}_{\emptyset} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (A \cap B^c) \cup \emptyset \quad \downarrow \emptyset \text{ neutro } \cup \\ &= (A \cap B^c) = (A \cap B^c) \cap C^c = (A|B) \setminus C \quad \square \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \subseteq C^c$$



- i) $X \subseteq Y^c$
- ii) $Y^c \subseteq X^c$
- iii) $X \cap Y^c = \emptyset$
- iv) $Y \cup X^c = E$

Hipótesis: $A \cap C = \emptyset, A \subseteq C^c$
 $X \cap Y^c = \emptyset$

$$*) A=B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$$

$$**) A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus B = A$$

Probaremos

$$A=B \Leftrightarrow (A \cap B) = A \cup B \Leftrightarrow A=B \Rightarrow (A \cap B) = A \cup B \wedge (A \cap B) = (A \cup B) \Rightarrow A=B$$

$$\Leftrightarrow \text{PDQ} \quad (A \cap B) = (A \cup B) \Rightarrow A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \quad \checkmark \text{ Análogo igual cambiando variables}$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset \quad \leftarrow$$

$A \cap B = A \cup B / \cap B^c$ para que se parezcan

$$\Rightarrow A \cap (B \cap B^c) = (A \cup B) \cap B$$

$$\Leftrightarrow A \cap \emptyset = (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c), \emptyset \text{ medio } \cup$$

$$\Leftrightarrow \emptyset = A \cap B^c \Leftrightarrow A \subseteq B \quad \text{Análogo } B \subseteq A$$

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A=B$$

$$\Rightarrow A=B \Rightarrow A \cap B = A \cup B \quad \square$$

$$A \cap B = A \cap A = A = A \cup A = A \cup B \quad \square$$

$$\Leftarrow \therefore A=B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B, \forall A, B \subseteq E \quad \square$$

Recreo 10 minutos

Suban su foto

con café o té

♥ Ánimo

22:08

$$1) A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A \cup B) \cap B = A$$

↓ def diferencia

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A \cup B) \cap B^c = A$$

↓ distributiva

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c) = A$$

↓ $\emptyset$ absorbente

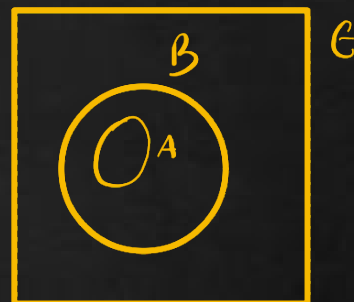
$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap B^c) \cup \emptyset = A$$

↓ $\emptyset$ neutro $\cup$

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B^c = A$$

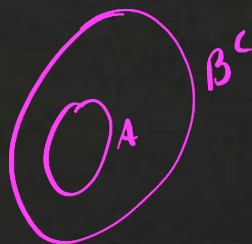
↓ def def

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \setminus B = A$$



$$\Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \setminus B = A$$

$$\Leftrightarrow A \subseteq B^c (*)$$



$$A \setminus B =$$

$$A \cap B^c = A \quad \text{pues } A \subseteq B^c (*)$$

$$\Leftarrow A \setminus B = A \Rightarrow$$

$$A \cap B = \emptyset$$

p	q	$p \Rightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Contradicción.

Supongo $\exists x \text{ t.q. } x \in A \cap B$
 $x \in A \cap B \neq \emptyset$

$$A \setminus B = A \quad \Leftrightarrow \quad \vee$$

$$\Leftrightarrow A \cap B^c = A \quad / \quad \cap B$$

$$\Rightarrow A \cap B^c \cap B = A \cap B$$

$$(A \cap B^c) \cap B = A \cap B$$

$$A \cap \underbrace{(B^c \cap B)}_{\varnothing} = A \cap B$$

$$A \cap \varnothing = A \cap B$$

$$\varnothing = A \cap B \neq \varnothing$$

Contradicción

$$\therefore A \setminus B = A \Rightarrow A \cap B = \varnothing \quad \square$$



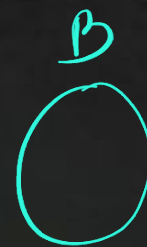
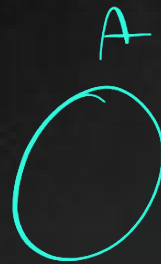
fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



b) Encuentre un conjunto X
t.q.

$$A \cup X = A \cup B \wedge A \cap X = \emptyset$$



$X = B$

$$A \cup B = A \cup B \wedge A \cap B = \emptyset$$

tomó
tú
punto
punto

Assumiendo A y B disjuntos, pero como A, B
Cualquier G no sabemos esa información

$$\textcircled{1} A \cup X = A \cup B \wedge \textcircled{2} A \cap X = \emptyset \quad \checkmark$$

$$A \cap X = \emptyset$$

$$\Rightarrow X \subseteq A^c$$

$$\text{i)} X \subseteq A^c$$

$$\text{ii)} A \subseteq X^c$$

$$\text{iii)} (X \cap A) = \emptyset$$

$$X \subseteq A^c$$

$$1) X = A^c \cap \{\text{algo}\}$$

$$2) X = A^c \cup \{\text{algo}\} \quad \bar{X}$$

$$X = A^c \cap B \quad \text{Candidato}$$

$$X = A^c \cap B^c$$

$$A \cup X \neq A \cup B \quad \uparrow$$

$$X = A^c \cap B$$

$$A \cup X = A \cup (A^c \cap B)$$

$$= (A \cup A^c) \cap (A \cup B)$$

$$= E \cap (A \cup B)$$

$$= A \cup B \quad \checkmark$$

$$A \cap X = A \cap (A^c \cap B)$$

$$= (A \cap A^c) \cap B$$

$$= \emptyset \cap B$$

$$A \cap X = \emptyset \quad \checkmark$$

$$X = A^c \cap B \quad \checkmark$$

Prop Importante

$$A \Delta X_1 = A \Delta X_2 \Rightarrow X_1 = X_2 \quad \text{Propuesto.}$$

Sección 6 Álgebra

Enlaces

Foro



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE