MA1101 - Introducción al Álgebra
Profesores: Juan Pedro Ross y Flavio Guiñez.
Auxiliares: Félix Brokering, Matías Carvajal, Carolina Chiu y Pedro Cortés.

Auxiliar 11: Estructuras Algebraicas y Morfismos

P1. Sea $E = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$. Considere la operación $*$ dada por:

$$x * y = xy - x - y + 2.$$

a) Demuestre que $(E, *) \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$.

b) En la auxiliar pasada, se vio que $(E, *)$ es un grupo abeliano comprobando propiedad por propiedad. Muestre de forma alternativa este mismo resultado.

P2. Dados un conjunto $A \neq \emptyset$, una función biyectiva fija $h : A \to A$ y el conjunto $\mathcal{F} = \{f : A \to A : f \text{ es función}\}$. Considerando $\circ$, la composición usual de funciones, se define sobre $\mathcal{F}$ la operación $*$ por:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, f * g = f \circ h \circ g.$$

a) Demuestre que $(\mathcal{F}, *)$ es una estructura algebraica asociativa y, en caso de existir, determine el elemento neutro.

b) Determine que elementos de $\mathcal{F}$ son invertibles y encuentre sus inversos.

P3. a) Sea $(A, *)$ una estructura algebraica con neutro e_A y $(B, \triangle)$ una estructura algebraica, con neutro e_B, asociativa y con todos sus elementos invertibles. Demuestre que si $f : A \to B$ es un morfismo, entonces $f(e_A) = e_B$.

b) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f : (\mathbb{Z}_n, +_n) \to (\mathbb{Z}, +)$ un morfismo cualquiera. Demuestre que f es la función constante igual a 0.

P4. Considerando $(A, *)$ una estructura algebraica asociativa en A. Sea $a \in A$ fijo, se define el conjunto:

$$B = \{x \in A : a * x = x * a\}$$

a) Demuestre que $\forall x, y \in B, x * y \in B$.

b) Muestre que si $e \in A$ es neutro, entonces $e \in B$.

c) Pruebe que si $x \in B$ tiene inverso x^{-1}, entonces $x^{-1} \in B$.

Resumen:

1. **Ley de composición interna (l.c.i.):** Dado un cjto. $A \neq \emptyset$. Una l.c.i. en A es una función

$$* : A \times A \to A$$
$$(x, y) \mapsto x * y$$

2. **Propiedades básicas:** Sea $(A, *, \triangle)$ una estructura algebraica. Diremos que:

   - **$*$ es Asociativa:** si $\forall x, y, z \in A$, $(x * y) * z = x * (y * z)$.
   - **$*$ es Conmutativa:** si $\forall x, y \in A$, $x * y = y * x$.
   - **$e \in A$ es Neutro para $*$:** si $\forall x \in A, e * x = x * e = x$.
   - **$a \in A$ es Cancelable:** si $\forall x, y \in A$, $a * x = a * y \implies x = y$ $\wedge\ y * a = x * a \implies x = y$.
   - **$x \in A$ tiene Inverso y :** si $\exists y \in A, x * y = y * x = e$.
   - **$\triangle$ Distribuye con respecto a $*$:** si $\forall x, y, z \in A, x \triangle (y * z) = (x \triangle y) * (x \triangle z) \wedge (y * z) \triangle x = (y \triangle x) * (z \triangle x)$.

3. **Unicidad del neutro:** si existe neutro, este es único.

4. **Unicidad de inversos:** Considerando $(A, *)$ asociativa con neutro. En caso de existir inversos en A, estos son únicos. Además, al inverso de x lo denotamos x^{-1} y se tiene que:

   - $x \in A$ posee inverso $\implies (x^{-1})^{-1} = x$.
   - $x, y \in A$ poseen inversos $\implies (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.
   - x tiene inverso $\implies x$ cancelable.

5. **Homomorfismos:** una función $f : A \to B$ es un homomorfismo de $(A, *)$ en $(B, \triangle)$ si

$$\forall x, y \in A, f(x * y) = f(x) \triangle f(y).$$

   Por otro lado, el homomorfismo puede tener nombres particulares, como:

   - **Monomorfismo:** si f es inyectiva.
   - **Epimorfismo:** si f es epiyectiva.
   - **Isomorfismo:** si f es biyectiva.
   - **Endomorfimos:** si $(A, *) = (B, \triangle)$. Si además f es biyectiva, se llama **Automorfismo**.

6. **Propiedadades:** Dado un epimorfismo f de $(A, *)$ en $(B, \triangle)$, se tiene que:

   - $(A, *)$ es asociativa $\implies$ $(B, \triangle)$ es asociativa.
   - $(A, *)$ es conmutativa $\implies$ $(B, \triangle)$ es conmutativa.
   - $(A, *)$ posee neutro $e \implies (B, \triangle)$ posee neutro $f(e)$.
   - $x \in A$ tiene inverso $y \in A \implies f(x) \in B$ tiene inverso $f(y) \in B$.

   Dado un morfismo f de $(A, *)$ en $(B, \triangle)$ con neutros e_A y e_B respectivamente, se tiene que:

   - $e_B \in f(A) \implies e_B = f(e_A)$.
   - $e_B \in f(A)$ y $x \in A$ posee inverso $y \in A \implies f(x) \in B$ posee inverso $f(y) \in B$.

7. **Estructuras isomorfas:** Dos estructuras $(A, *)$ y $(B, \triangle)$ son isomorfas, denotado $(A, *) \cong (B, \triangle)$, si existe isomorfismo entre las estructuras. Además, la relación $\cong$ es de equivalencia. También, si f es un isomorfismo de $(A, *)$ en $(B, \triangle)$, f^{-1} también es un isomorfismo de $(B, \triangle)$ en $(A, *)$.