

Auxiliar Examen: Complejos y Polinomios
Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

[Complejos]

P1. Escriba en forma polar los siguientes números complejos:

i) $1 + i$ ii) $1 + i\sqrt{3}$ iii) $(1 - i\sqrt{3})(-2\sqrt{3} + 2i)$ iv) $(-1 - i)^6$

P2. i) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$.
 Demuestre que $\forall n \geq 1, z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta)$

ii) Sea $z \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Demuestre que las siguientes expresiones son todas números reales:

- $z^n + (\bar{z})^n$
- $\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+(\bar{z})^n}$
- $(1 + pe^{i\frac{\pi}{2}})^n + (1 - pe^{i\frac{\pi}{2}})^n$

P3. i) Encuentre las raíces cúbicas del complejo $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}$

ii) Solucione para x la ecuación $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

P4. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz cubica de la unidad con $w \neq 1$. Pruebe que

$$(1 + w)^3 + (1 + w^2)^9 + (1 + w^3)^6 = 62$$

P5. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

i) Pruebe que $|1 - z_2\bar{z}_1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|)^2(1 - |z_2|)^2$

Indicación: Usar propiedad $a \cdot \bar{a} = |a|^2$ sobre números complejos convenientes.

ii) Ahora suponga que $|z_1| < 1$ y $|z_2| < 1$. Pruebe que:

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_2\bar{z}_1|} < 1$$

P6. Sean $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ las raíces n -ésimas de la unidad ordenadas de manera usual (es decir, según argumento de manera creciente).

a) Demuestre que:

$$w_0w_1 + w_1w_2 + \dots + w_{n-2}w_{n-1} + w_{n-1}w_0 = 0$$

b) Pruebe que $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0$$

c) Sea $z \in \mathbb{C}$ fijo. Pruebe que:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (z + w_j)^n = n(z^n + 1)$$

[Polinomios]

P1. Sea p un polinomio a coeficientes reales.

Se sabe que este polinomio tiene como raíces a $1 + i, 1 - i, 3, 6, 2i, 4 - i$. Encuentre el grado mínimo del polinomio p y encuentre la expresión de este polinomio sabiendo que es mónico.

P2. Sea $p \in \mathbb{C}[x]$.

i) Demuestre que p es sobreyectivo si y solo si $gr(p) \geq 1$

Indicación: Recuerde el teorema fundamental del álgebra.

ii) Demuestre que p es inyectivo si y solo si $gr(p) = 1$

Indicación: Ponerse en casos para $gr(p)$.

P3. i) Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

ii) Considere el polinomio $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$. Se sabe que i es raíz de $p(x)$ de multiplicidad 2. Encuentre todas las raíces y factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$

iii) Se sabe que el polinomio

$$p(z) = 2z^3 - (5 + 6i)z^2 + 9iz - 3i + 1$$

admite una raíz real a (es decir, $a \in \mathbb{R}$). Determine todas las raíces de $p(z)$

P4. Sea $p(x) \in \mathbb{R}(x)$ un polinomio mónico con $gr(p) = 3$. Se sabe que $p(x)$ es divisible por $(x - 1)$ y que los restos de sus divisores por $(x - 2)$, $(x - 3)$ y $(x - 4)$ son iguales. Determine $p(x)$, justificando sus pasos, y encuentre todas sus raíces.

P5. Sea $P(x)$ un polinomio tal que $P(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$. Encuentre $P(x^2 - 1)$.

P6. Mediante división de polinomios, factorize los siguientes polinomios:

i) $2x^3 - 5x^2 - x - 6$

ii) $4x^4 - 15x^3 + 12x^2 + 4x$

iii) $2x^4 - 4x^3 - 42x^2 - 124x - 80$

iv) $-x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 9x + 18$

P7. Si $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, muestre que:

i) $1 + 2w + 3w^2 + \dots + nw^{n-1} = \frac{-n}{1-w}$

ii) $(1 - w)(1 - w^2) \dots (1 - w^{n-1}) = n$

P8. Sean a, b, c números reales positivos.

¿Es posible que los polinomios $p(x) = ax^2 + bx + c$, $q(x) = bx^2 + cx + a$, $r(x) = cx^2 + ax + b$ tengan sus dos raíces reales y distintas, simultáneamente?

P9. Al dividir el polinomio $p(x) = \alpha x^4 - x^3 + \beta x^2 + 10x - 2\alpha$ por $(x - 1)$ el resto es 3 y el cociente toma valor 21 para $x = 2$. Calcule α y β .

P10. i) Sea $p(x) = x^2 + x + 1$. Demuestre que las raíces de $p(x)$ son las raíces cúbicas de la unidad, a excepción del 1.

ii) Sean a, b, c números naturales. Sea $q(x) = x^{3a} + x^{3b+1} + x^{3c+2}$.

Demuestre que el polinomio p divide al polinomio q .