Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
13 de junio de 2023

Auxiliar 12: Grupos y Subgrupos

Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Considere el conjunto de funciones :

$$G = \{f_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f_{a,b}(x) = ax + b,\ \ a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$$

i) Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a, c \neq 0$, encuentre $(f_{a,b} \circ f_{c,d})(x)$ y deduzca que la composición de funciones es cerrada en G.

ii) Demuestre que $(G, \circ)$ es un grupo. ¿Es un grupo abeliano?

iii) Sea $H = \{h_b \in G : h_b(x) = x + b, b \in \mathbb{R}\}$. Demuestre que H es subgrupo de G.

iv) Demuestre que $\forall g \in G$, se tiene que $gHg^{-1} = H$, donde:

$$gHg^{-1} = \{g \circ h \circ g^{-1} : h \in H\}$$

P2. Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y $H = \{h : G \longrightarrow G : h \text{ endomorfismo}\}$.
Se define en H la ley dada por:

$$\forall h_1, h_2 \in H, \forall x \in G : \ \ (h_1 \triangle h_2)(x) = h_1(x) * h_2(x)$$

Demuestre que $(H, \triangle)$ es un grupo abeliano.

P3. Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y sean H, K subgrupos de G. Demuestre que el conjunto:

$$H * K = \{h * k : h \in H, k \in K\}$$

es subgrupo de G.

P4. **[Propuesto]** Sea $(G, *)$ un grupo. Para $a \in G$, se define la función $f_a : G \longrightarrow G$ tal que:

$$\forall x \in G : f_a(x) = a * x * a^{-1}$$

Se definen además los conjuntos:

$$A = \{f : G \longrightarrow G : f \text{ es automorfismo }\} \qquad B = \{f : G \longrightarrow G : f \text{ es biyectiva }\}$$

i) Pruebe que $\forall a \in G$, f_a es un automorfismo.

ii) Deducir que si H es un subgrupo de G entonces $H_a = \{a * h * a^{-1} : h \in H\}$ es subgrupo de G.

iii) Demuestre que $(A, \circ)$ es subgrupo de $(B, \circ)$.

iv) Pruebe que $\psi : (G, *) \longrightarrow (A, \circ)$ tal que $\forall a \in G, \psi(a) = f_a$ es homomorfismo.

Resumen

[Grupo] Si $(G, *)$ es una estructura algebraica asociativa, con neutro y tal que todo elemento es invertible, entonces diremos que $(G, *)$ es un grupo. Si ademas la operación $*$ es conmutativa, diremos que es un grupo abeliano.

[Propiedades] Sea $(G, *)$ un grupo, entonces:

- El inverso de cada elemento es único.
- $(\forall x \in G)$, $(x^{-1})^{-1} = x$.
- $(\forall x, y \in G)$, $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.
- Todo elemento $x \in G$ es cancelable.
- Para todo $a, b \in G$, las ecuaciones:
$$\begin{aligned} a * x_1 &= b \\ x_2 * a &= b \end{aligned}$$
tienen solución única. Ellas son $x_1 = a^{-1} * b$ y $x_2 = b * a^{-1}$.
- El **único** elemento idempotente de G es su neutro.

[Subgrupo] Sea $(G, *)$ grupo y $H \subseteq G, H \neq \emptyset$. Diremos que H es **subgrupo** de G si $(H, *)$ es un grupo.

[Propiedades] Sea $(H, *)$ subgrupo de $(G, *)$. Entonces:

i) Si e es neutro de $(G, *)$ y e_H es neutro de $(H, *)$, entonces $e_H = e$.

ii) Sea $x \in H$. Sea $x^{-1} \in G$ el inverso de x en $(G, *)$ y $\overline{x} \in H$ el inverso de x en $(H, *)$. Entonces se tiene que $\overline{x} = x^{-1}$

[Caracterización de Subgrupo] Sea $H \neq \emptyset$. Entonces:

$$(H, *) \text{ es subgrupo de } (G, *) \iff H \subseteq G \land \forall x, y \in H : x * y^{-1} \in H$$