

### Auxiliar 10: Conjuntos infinitos

Profesor: Alexander Frank

Auxiliar: Gonzalo Ovalle

**P1.** Demuestre los cardinales pedidos en cada caso:

- i)  $A = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 : a + b + c = 5\}$ ,  $|A| = |\mathbb{N}|$
- ii)  $S_3 = \{X \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |X| = 3\}$ ,  $|S_3| = |\mathbb{N}|$
- iii)  $F = \{f \mid f : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N} \text{ función}\}$ ,  $|F| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$
- iv) **[Propuesto]**  $L = \{l \mid l \text{ recta en } \mathbb{R}^2 \text{ que pasa por } (\pi, \pi) \text{ y corta el eje OY en coordenada racional}\}$   
 $|L| = |\mathbb{Q}|$

**P2.** a) Demuestre que el conjunto  $I = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es irracional}\}$  no es numerable.

b) Sea  $N_{K_5}$  el conjunto que contiene a todos los cuadriláteros en  $\mathbb{R}^2$  que tienen sus 4 coordenadas racionales, es decir, en  $\mathbb{Q}^2$ . Demuestre que  $N_{K_5}$  es numerable.

**P3.** El objetivo de este problema es demostrar que el producto numerable de conjuntos numerables no es numerable.

- i) Se define el conjunto  $B_{\mathbb{N}} := \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \text{ función}\}$ . Demuestre que  $|B_{\mathbb{N}}| \geq |\mathbb{N}|$ .
- ii) Demuestre que la función:

$$\begin{aligned} \phi : P(\mathbb{N}) &\longrightarrow B_{\mathbb{N}} \\ A &\longrightarrow \phi(A) = f \\ f(n) &= \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

es biyectiva.

iii) Si se define  $2^{\mathbb{N}} := \{(b_i)_{i \in \mathbb{N}} : \forall i \in \mathbb{N}, b_i \in \{0, 1\}\}$ , demuestre entonces que  $|2^{\mathbb{N}}| = |B_{\mathbb{N}}|$

iv) Concluya que el conjunto  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} := \{(n_i)_{i \in \mathbb{N}} : \forall i \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}\} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}$  no es numerable.

Obs: La notación  $\prod_{i=1}^n A_i$  quiere decir  $\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ , por lo tanto:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{N} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} \times \dots$$

Es decir, es el producto cartesiano de los naturales consigo mismo, una cantidad infinita numerable de veces.

**P4. [Propuesto]** Para todo  $n \in \mathbb{N}$  se define  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  función. Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$ , y se define  $U = \{f_n(a) \mid a \in A, n \in \mathbb{N}\}$ . Demuestre que si  $A$  es numerable, entonces  $U$  es numerable.

## Resumen

[**Cardinal**]  $|A| = |B| \iff \exists f : A \rightarrow B$  biyectiva. y  $|A| \leq |B| \iff \exists f : A \rightarrow B$  inyectiva.

[**Definiciones**] Para  $A, B$  conjuntos no vacíos, se tiene que.

i)  $|A| \leq |A|$

ii) Si  $A \subseteq B$ , entonces  $|A| \leq |B|$

iii) Si  $|A| \leq |B|$  y  $|B| \leq |C|$  entonces  $|A| \leq |C|$

iv)  $|A| \leq |B|$  y  $|B| \leq |A| \iff |A| = |B|$

[**Cardinal del conjunto imagen**] Si  $f : A \rightarrow B$  función, entonces  $|f(A)| \leq |A|$ .

[**Conjunto Infinito**] Un conjunto  $A$  que no es finito se dice infinito

[**Proposición**]  $\mathbb{N}$  es infinito

[**Conjuntos Numerables**] Un conjunto se dice numerable si tiene la misma cardinalidad que  $\mathbb{N}$

[**Proposiciones respecto a numerabilidad**]

- $|\mathbb{N}|$  es el menor cardinal infinito.
- Sea  $A$  conjunto infinito y  $B$  conjunto finito, entonces  $|A \cup B| = |A \setminus B| = |A|$ .
- [**Unión finita de numerables**] Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  es una familia de conjuntos numerables, entonces  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  también lo es
- [**Unión numerable de numerables**] La unión numerable de conjuntos numerables, también es numerable.
- [**Producto finito de conjuntos numerables**] Si  $A_1, \dots, A_n$  es una familia de conjuntos numerables, entonces  $A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i \in A_i\}$  también lo es.

**Ejemplos:** Los siguientes conjuntos son numerables:  $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, (\mathbb{N} \times \mathbb{N}), ((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \times (\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{Z})))^3$ , etc.

[**Conjuntos no numerables**] Existen conjuntos tales que su cardinal es infinito y es distinto al cardinal de los naturales, dichos conjuntos se dicen no numerables.

[**Teorema de Cantor**] El cardinal del conjunto potencia de un conjunto es mayor al cardinal del conjunto, es decir, si  $A$  es un conjunto, es decir  $|A| < |P(A)|$ .

[**Proposición**]:  $|P(\mathbb{N})| \leq |[0, 1]|$

[**Corolario**]:  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| < |[0, 1]| = |\mathbb{R}|$ . En particular  $\mathbb{R}$  no es numerable.

[**Hipótesis del continuo - Información adicional**]:

En resumidas cuentas, hay una hipótesis (Georg Cantor, 1878) en matemáticas que dice:

$$\text{No existe un conjunto } B \text{ tal que } |\mathbb{N}| < |B| < |\mathbb{R}|$$

Se demostró en 1963 (Paul Cohen) que esta hipótesis no es demostrable con los axiomas que conforman la teoría de conjuntos estándar, es decir, no es posible brindar una demostración que testifique su veracidad (en 1940 Kurt Gödel demostró que no es posible demostrar la falsedad de la hipótesis). Además, se ha evidenciado que asumir esta hipótesis cierta o asumirla como mentira no conlleva ninguna contradicción con las bases axiomáticas de la teoría de conjuntos utilizada en la mayor parte de la matemática moderna.