Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
24 de marzo de 2023

Auxiliar 4 precontrol: Cardinal finito

Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Se definen:

$$B_7 := \{f \mid f : \{1, ..., 7\} \longrightarrow \{0, 1\} \text{ función } \}$$
$$B_7^1 := \{f \mid f : \{1, ..., 7\} \longrightarrow \{0, 1\} \text{ función } \wedge f(1) = 0\}$$
$$B_7^2 := \{f \mid f : \{1, ..., 7\} \longrightarrow \{0, 1\} \text{ función } \wedge f(2) = 0\}$$
$$B_7^{1\vee 2} := \{f \mid f : \{1, ..., 7\} \longrightarrow \{0, 1\} \text{ función } \wedge (f(1) = 0 \vee f(2) = 0)\}$$

i) Calcular $|B_7|$

ii) Demuestre que $|B_7^1| = |B_7^2| = 64$

iii) Demuestre que $|B_7^{1\vee 2}| = 96$

P2. i) Sea C un conjunto tal que $|C| = 2j + 1, j \in \mathbb{N}$.
Demuestre que la cantidad de subconjuntos de C de tamaño impar es 2^{2j}.

ii) **[Propuesto]** Sea $C = \{1, 2, ..., N\}$ un conjunto.
Demuestre que la cantidad de subconjuntos de C de tamaño impar es 2^{N-1}.

P3. i) Sean A_1, A_2, B conjuntos finitos no vacíos tales que $A_1 \neq A_2$. Calcular:

$$|\{f \mid f : X \longrightarrow B \text{ función }, X \in \{A_1, A_2\}\}|$$

ii) Sean A, B conjuntos finitos no vacíos tal que $|A| \geq 4$. Calcular:

$$|\{f \mid f : X \longrightarrow B \text{ función }, X \subseteq A, |X| = 4\}|$$

iii) Sean A, B conjuntos finitos no vacíos. Demuestre que:

$$|\{f \mid f : X \longrightarrow B \text{ función }, X \subseteq A, X \neq \emptyset\}| = (|B| + 1)^{|A|} - 1$$

P4. [Propuesto]

i) Sea $Z = \{1, 2, ..., M\}$ y $z \in \mathbb{N}$. Demuestre que:

$$|\{\frac{|X|}{2^z} \mid X \in P(Z)\}| = M + 1$$

ii) Sea $D = \{\frac{i}{\pi^2} : i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n, n \in \{0, 1, ..., 99\}\}$ y $E = \{i(-1)^i : i \in \{0, 1, ..., 9\}\}$.
Calcular $|E \times D|$

Resumen

[Conjunto Finito] Un conjunto A es $finito$ si existe $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_n$ distintos entre si (es decir, si $i \neq j$, entonces $a_i \neq a_j$) tales que $A = \{a_1, ..., a_n\}$. En este caso diremos que $a_1, ..., a_n$ es una enumeración de A, que el cardinal de A es n y lo denotaremos por $|A| = n$.
[Propiedades]

i) Para todo conjunto A, $|A| = 0 \iff A = \emptyset$

ii) Si A es un conjunto finito y B es un conjunto tal que $\exists f : A \longrightarrow B$ biyectiva, entonces B es un conjunto finito y $|A| = |B|$.

iii) Sea B un conjunto finito. Si $A \subseteq B$, entonces A es conjunto finito y $|A| \leq |B|$.

iv) Si $B \subseteq A$ y A es finito, entonces $|A \setminus B| = |A| - |B|$

v) Si A, B son conjuntos finitos, entonces se tiene $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

[Prop] Sean A, B conjuntos finitos tales que $|A| = |B|$ y sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) f es inyectiva

ii) f es epiyectiva

iii) f es biyectiva

[Caracterización de Cardinales] Sean A, B conjuntos, donde B es conjunto finito. Se cumple que:

i) A es finito y $|A| \leq |B| \iff \exists f : A \longrightarrow B$ inyectiva.

ii) A es finito y $|A| = |B| \iff \exists f : A \longrightarrow B$ biyectiva.

[Cardinal de unión finita de conjuntos disjuntos] Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos finitos y disjuntos de a pares, entonces:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

[Cardinal producto cartesiano] Sean $A_1, .., A_n$ conjuntos finitos, entonces:

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_n|$$

[Conjunto de funciones] Sean A, B conjuntos , definimos el conjunto de todas las funciones de A en B por:

$$B^A = \{f : A \longrightarrow B | f \text{ función } \}$$

Y además se cumple que $|B^A| = |B|^{|A|}$

[Cardinal Conjunto Potencia] Sea A un conjunto finito, entonces se cumple que $|P(A)| = 2^{|A|}$