Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
22 de mayo de 2023

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 9: Sumatorias II

Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Sean $a_1, a_2, ...$ y $b_1, b_2, ...$ secuencias de números reales.
Fijando $n.m \in \mathbb{N}$, determine si las siguientes igualdades son ciertas:

i) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} a_k b_i = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} a_k b_i = \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} a_k b_i$

iii) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} a_k b_i = \sum\limits_{k=1}^{n} b_i \sum\limits_{i=1}^{m} a_k$

iv) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{k} a_k b_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=i}^{n} a_k b_i$

P2. Demuestre las siguientes identidades combinatoriales:

i) $\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}\frac{1}{n+1}$

ii) $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$ con $m < k, n$.

P3. Calcule:

i) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} 5^k$

ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1}$

iii) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$

iv) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{k+1}$, con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

v) $\sum\limits_{m=0}^{n} \sum\limits_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m}$

vi) $\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1) 4^{k+1} \binom{n+1}{k+1}$

vii) $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{j} \sum\limits_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \frac{2^{k+1}}{3^j}$ **[Propuesto]**

viii) $\sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}(-1)^i$ **[Propuesto]**

P4. Pruebe que para todos los $z \leq n$, con $z, n \in \mathbb{N}$, se tiene la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=0}^{z} \binom{n}{k} (-1)^k = \binom{n-1}{z} (-1)^z$$

P5. Sea $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de números reales que cumple $D_0 = 1, D_1 = 0$ y $\forall n \geq 2,\ D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.
Demuestre por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Resumen

[Sep. de índices] Sea $(a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de números reales y sean $I_1, I_2, ..., I_m \subseteq \mathbb{N}$ con I_i finito $\forall i \in \{1, ..., m\}$ y $\forall i, j \in \{1, ..., m\}, i \neq j : I_i \cap I_j = \emptyset$ Entonces:

$$\sum_{k\in(I_1\cup I_2\cup...\cup I_m)} a_k = \sum_{k\in I_1} a_k + \sum_{k\in I_2} a_k + ... + \sum_{k\in I_m} a_k$$

[Sumatoria dobles] Sean $(a_k)_{k\in[1,...,n]}$ y $(b_j)_{j\in[1,...,m]}$ dos secuencias de números reales. Entonces se tiene:

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k)(\sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} a_k b_j)$$

[Intercambio de Sumatorias] Para una sumatoria doble $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{k,j}$ cuyo límites inferiores y superiores no dependen de los índices, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{k,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}$$

Análoga es la situación cuando se tienen dos sucesiones de números reales $(a_k)_{k\in\{1,...,n\}}$ y $(b_j)_{j\in\{1,...,m\}}$, entonces se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_k b_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_k b_j$$

[Coeficiente Binomial] Para dos enteros n y k, $0 \leq k \leq n$, se define:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Observación: El término $\binom{n}{k}$ se lee éne sobre ka'
y es la cantidad de posibles subconjuntos de tamaño k, obtenidas a partir de un conjunto de tamaño n.

[Propiedades] Para n, k enteros, $n \geq 0$ se tiene:

i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

ii) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

[Binomio de Newton] Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$