Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
17 de mayo de 2023

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 8: Sumatorias
Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Escriba las siguientes sumas en notación de sumatoria:

i) $1+3+5+7..+25$

ii) $3-7+6-14+9-21+...-98$

iii) $\frac{1}{3}+\frac{2}{1}+\frac{3}{3}+...+\frac{10}{1}$

iv) $\frac{2}{1}-\frac{4}{5}+\frac{8}{9}-\frac{16}{13}+...-\frac{256}{29}$

P2. Justifique el porque las siguientes ecuaciones son ciertas, vía argumentos de aritmética/álgebra: (sin aplicar resultados mas generales ya vistos antes)

i) $\sum\limits_{k=0}^{2n} k = n(2n+1)$

ii) $\sum\limits_{k=1}^{2n} 2^k = \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{2k-1} + \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{2k}$

P3. Calcule las siguientes sumatorias:

i) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k+1)^3$

ii) $\sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k 3^k$

iii) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)}$

iv) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{-2}{nk(k+2)}$

v) $\sum\limits_{k=1}^{n} k2^k$

vi) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(k-1)2^k}{nk(k+1)}$

P4. Sea $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales que cumple $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} a_i = n^2 - 3n.$

Con esta información determine $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_i$ y a_n.

P5. **[Propuesto]** Sea $n \in \mathbb{N}$ positivo, calcular:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(3+(-1)^k)^k}$$

P6. **[Propuesto]** Pruebe por inducción la suma geométrica:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; r \neq 1 : \qquad \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

P7. **[Propuesto]** Pruebe por inducción:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (1+2^{k-1}) = n + 2^{n+1}$$

P8. [Propuesto] Pruebe por inducción:

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1) = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(n+2)$$

Resumen

[Definiciones de Sumatorias]

Secuencia de números reales: Una secuencia de números reales es una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $I \subseteq \mathbb{N}$. Por comodidad, una secuencia se anotará $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, donde $a_i = a(i)$, para $i \in I$.
Observación: Notar que $a = (a_i)_{i\in J} = (a_k)_{k\in J} = (a_j)_{j\in J}$, pues i, j, k son solo índices mudos.

Sumatoria: Sea $(a_i)_{i\geq m}$ una secuencia de números reales. Para $n \geq m$, definimos la sumatoria de los términos $a_m, a_{m+1}, ..., a_n$, por la siguiente recurrencia:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m & , \text{ si } n = m \\ a_n + \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k & , \text{ si } n > m \end{cases}$$

[Propiedades de Sumatorias]

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, y sean $(a_k)_{k\geq m}, (b_k)_{k\geq m}$ dos secuencias. Para todo $n \geq m$ se tiene:

i) $\sum\limits_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$

ii) $\sum\limits_{k=m}^{n} \lambda \cdot 1 = \lambda \sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ (Factorización de constantes)

iii) $\sum\limits_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k \pm \sum\limits_{k=m}^{n} b_k$ (Sumatoria de dos secuencias)

iv) $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{k-s}^{n-s} a_{k+s} = \sum\limits_{k+s}^{k+s} a_{k-s}$ (Traslación de índice $s \in \mathbb{N}$)

v) $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{k=m}^{s} a_k + \sum\limits_{k=s+1}^{n} a_k$ (Separación del conjunto de índices, para $m \leq s < n$)

vi) $\sum\limits_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$. (Suma telescópica)

[Resultados conocidos]

i) $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

ii) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

iv) Si $r \neq 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ (Fórmula geométrica)