Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
10 de mayo de 2023

Auxiliar precontrol 3
Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Sean A, B subconjuntos de U conjunto de referencia tales que $A \cap B = \emptyset$. Sea $f : U \longrightarrow U$ una función.

i) Pruebe que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$

ii) Probar que si f es inyectiva entonces $f(A) \cap f(B) = \emptyset$

iii) Probar que si f es epiyectiva entonces $f(A) \cup f(A^c) = U$

Indicaciones: Para la i) y ii) puede servir contradicción, suponer que hay un elemento en la intersección de preimagenes/imágenes y eso debería contradecir algo del enunciado. (también sirve una identidad de preimagenes del resumen). Para la iii) notar que si f epiyectiva, entonces $f(U) = U$, además una identidad de conjunto imagen.

P2. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones. Sea $X \subseteq C$ fijo, demuestre que:

$$(g \circ f)^{-1}(X) = f^{-1}(g^{-1}(X))$$

Indicaciones: Proceder por definición de pertenecer a $(g \circ f)^{-1}(X)$, intentar jugar con que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ y considerar ahora a $f(x)$ como lo que esta adentro de g y seguir con definiciones.

P3. Sea $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ definida como:

$$f(m, n) = (m + n, m - n)$$

i) Calcular explícitamente $f(\{0\} \times [0, 4])$ y demostrar que $f^{-1}(\{1, 2\} \times \{3, 4\}) = \{\{2, -1\}, \{3, -1\}\}$

ii) Calcular los mismos conjuntos que en i) pero con f ahora definida como $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Indicaciones: Para el conjunto imagen, escribir que significa que un elemento sea imagen de alguien que vive en $\{0\} \times [0, 4]$ y usar la def de f. Para la preimagen es análogo. Para la ii), fijarse que el conjunto imagen ya no puede escribirse explícitamente, escribir simplemente por su definición y el conjunto imagen debería mantenerse igual. (esto no es una propiedad ni algo así, solo ocurre en este ejercicio en particular)

P4. **(*)** Sea $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ conjunto finito de referencia y sea $f : A \longrightarrow A$ una función. Se define en $P(A) \setminus \{\emptyset\}$ la relación R dada por:

$$XRY \iff |f(X)| = |f(Y)|$$

i) Demuestre R es relación de equivalencia.

ii) Demuestre que si f es epiyectiva, entonces $A/R = \{[\{a_1, ..., a_i\}]_R : 1 \leq i \leq n\}$

Indicaciones: i) debería salir sin problemas. Para ii), notar que si f es epiyectiva, cualquier $y \subseteq A$ cumple que $f(f^{-1}(Y)) = Y$ (esta propiedad la vimos en el auxiliar 6), es decir, puedo escribir Y como la imagen de $f^{-1}(Y)$, en particular si esto se tiene para cualquier $Y \subseteq A$, se tiene para los conjuntos de la forma $\{a_1, ..., a_i\}$, y la indexación del conjunto a demostrar que sea el cuociente hace variar el cardinal/tamaño de ese conjunto, por lo que en verdad el conjunto $\{[\{a_1, ..., a_i\}] : 1 \leq i \leq n\}$ contiene adentro clases de equivalencias tales que, sus representantes, son conjuntos imágenes, y el variar el i varía el cardinal de los representantes.

P5. Sea U un conjunto de referencia. Se define en $P(U)$ la relación $\mathbf{R}$ definida como:

$$A\mathbf{R}B \iff \exists h : A \longrightarrow B \text{ biyectiva}$$

i) Demuestre que $\mathbf{R}$ es de equivalencia.

ii) Suponga que U es un conjunto finito, digamos $|U| = n$.
Para $A \in P(U)$, encuentre $[A]_{\mathbf{R}}$ y con esa información encuentre el conjunto cuociente.

Indicaciones: i) debiese salir sin problema, recordar que si h biyectiva entonces tiene inversa h^{-1} que también es biyectiva y la composición de biyectivas cumple una propiedad importante.
ii) similar a P4, note que si dos conjuntos A,B se relacionan, entonces necesariamente deben tener la misma cantidad de elementos (intente demostrarlo: por contradicción, asuma que un conjunto, sin perdida de generalidad el conjunto A, tiene mas elementos que B, vea que eso no puede ser. Si no sale en un rato, asúmalo y continúe con eso como dato). y con eso entonces los elementos que se relacionan son los que tienen la misma cantidad de elementos, y como $|U| = n$, el tamaño de A solo puede variar en cierto rango...

P6. Sea E conjunto de referencia y $A \subseteq E$ un subconjunto fijo de E. Se define en $P(E)$ la relación $\mathbf{C}$ dada por:

$$X\mathbf{C}Y \iff X \cap A = Y \cap A$$

i) Demuestre que $\mathbf{C}$ es relación de equivalencia.

ii) Demuestre que $P(E)/\mathbf{C} = \{[B]_{\mathbf{C}} : B \in P(A)\}$

Indicaciones: Para ii), notar que por definición $P(E)/\mathbf{C} = \{[B]_{\mathbf{C}} : B \in P(E)\}$, y piden demostrar $P(E)/\mathbf{C} = \{[B]_{\mathbf{C}} : B \in P(A)\}$. Basta demostrar que todo $Y \in P(E)$ se relaciona con algún $K \in P(A)$ para tener la igualdad buscada. (piense en porque, la idea principal es que $\{[B]_{\mathbf{C}} : B \in P(A)\}$ tiene a todos los representantes de las clases de equivalencia, y se caracterizan por el "pedazo de A"que contienen, esto dada la forma de la relación C, que relaciona elementos dependiendo de si comparten precisamente la misma porción en A)

P7. **(*)** Se define en $\mathbb{Z}$ la relación R dada por :

$$aRb \iff 4|a^2 + 3b^2$$

Donde $m|n \iff n = km, k \in \mathbb{Z}$

i) Demuestre que la relación R es de equivalencia.

ii) De 2 elementos en $[0]_R$ y 2 elementos en $[1]_R$.

iii) Muestre que $mR1 \iff (m \equiv_4 1 \vee m \equiv_4 3)$.
Con esto, reescriba la definición de la clase de equivalencia del 1 en respecto a la relación R.
<u>Indicación</u>: Recuerde que $a \equiv_n b \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = kn$

iv) De manera similar, muestre que $mR0 \iff (m \equiv_4 0 \vee m \equiv_4 2)$

v) Con esto concluya que:

$$[0]_R = [0]_4 \cup [2]_4, \qquad [1]_R = [1]_4 \cup [3]_4, \qquad y \qquad \mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R\}$$

Donde escribimos $[a]_n = [a]_{\equiv_n}$ para hacer mas ligera la notación. (como aparece en el apunte)

Indicaciones: La haremos en clases, pero de todas formas:
Para i), la simetría puede resultar algo complicada, para eso note lo siguiente $4a^2+4b^2 = (a^2+3b^2)+(3a^2+b^2)$, por lo que sabiendo algo de (a^2+3b^2), puede decir algo de $(3a^2+b^2)$. Para iii), utilizar la definición de $a \equiv_4 b$ aplicada a los casos que se indican y trabaje con las ecuaciones resulantes y la definición de R. Para v), notar que iii) y iv) estan diciendo que los elementos que se relacionan con el 0 vía R, son los mismos que se relacionan con 0 y 2 vía la relación $\equiv_4$, lo mismo para la otra igualdad, por lo que debe formalizarlo escribiendo la definición de los conjuntos y viendo que coinciden. Finalmente la forma del conjunto cuociente deriva de que $[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4$ son partición de $\mathbb{Z}$, por lo que en vista de lo anterior, $[0]_R, [1]_R$ es partición de $\mathbb{Z}$ y son clases de equivalencia, por lo tanto deben ser el conjunto cuociente (son todas las clases de equivalencias posibles pues particionan $\mathbb{Z}$)

P8. En $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se define la relación:

$$mRn \iff m|n \wedge (mn) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Demuestre que R es una relación de orden en $\mathbb{Z}$ y determine si es o no una relación de orden total.

Indicaciones: Recordar que $m|n \iff m = kn, k \in \mathbb{Z}$

P9. Sea $F = \{(A, f) : A \subseteq \mathbb{R} \wedge f : A \longrightarrow R \text{ función}\}$. Se define en F la relación Ω como:

$$(A, f)\Omega(B, g) \iff (A \subseteq B \wedge \forall x \in A : f(x) = g(x))$$

i) Demuestre que Ω es una relación de orden.

ii) ¿Es Ω una relación de orden total? Justifique

Indicaciones: Recordar que dos funciones son iguales si y solo si tienen mismo dominio y recorrido y sus evaluaciones son idénticas para todo el dominio.

Resumen

[**Conjunto Imagen**] Sea $f : A \longrightarrow B$ una función y sea $A' \subseteq A$, se define el conjunto imagen de A' como:

$$f(A') = \{f(x) \in B : x \in A'\} = \{y \in B | \exists x \in A' : f(x) = y\}$$

[**Algunas propiedades**] Sean $A_1, A_2 \subseteq A$, entonces se tiene:

- $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

[**Conjunto Preimagen**] Sea $f : A \longrightarrow B$ una función y sea $B' \subseteq B$, se define el conjunto preimagen de B' como:

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$$

[**Algunas propiedades**] Sean $B_1, B_2 \subseteq B$, entonces se tiene:

- $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

[**Relación**] Una tripleta de conjuntos (A, B, R) es una relación si cumple $R \subseteq A \times B$
Para $(a, b) \in A \times B$, decimos aRb si $(a, b) \in R$ y $a\not R b$ si $(a, b) \notin R$

[**Propiedades de relaciones**] Sea R una relación en A es:

- **Refleja** sí $\forall x \in A, xRx$
- **Simétrica** si $\forall x, y \in A, xRy \implies yRx$
- **Antisimétrica** si $\forall x, y \in A, xRy \wedge yRx \implies x = y$
- **Transitiva** si $\forall x, y, z \in A, xRy \wedge yRz \implies xRz$

La relación R se dice de **orden** si es refleja, antisimétrica y transitiva.
La relación R se dice de **equivalencia** si es refleja, simétrica y transitiva. Sea A un conjunto y R una relación de equivalencia definida sobre A.
[**Clase de equivalencia**] Para $x \in A$, se define la clase de equivalencia de x como todos los elementos de A con los x se relaciona vía R, es decir:

$$[x]_R := \{a \in A : aRx\} \subseteq A$$

[**Conjunto Cuociente**] Se define como el conjunto que contiene a todas las clases de equivalencia de la relación R en A, es decir:

$$A/R := \{[a]_R : a \in A\}$$

Observación: El conjunto A/R es una partición de A.
[**Propiedades**] Para todo $x, y \in A$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $[x]_R \subseteq [y]_R$

ii) $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$

iii) xRy

<u>Obs</u>: Notar que $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \iff [x]_R = [y]_R$