Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
10 de mayo de 2023

Auxiliar precontrol 3

Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Sean A, B subconjuntos de U conjunto de referencia tales que $A \cap B = \emptyset$. Sea $f : U \longrightarrow U$ una función.

i) Pruebe que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$

ii) Probar que si f es inyectiva entonces $f(A) \cap f(B) = \emptyset$

iii) Probar que si f es sobreyectiva entonces $f(A) \cup f(A^c) = U$

P2. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones. Sea $X \subseteq C$ fijo, demuestre que:

$$(g \circ f)^{-1}(X) = f^{-1}(g^{-1}(X))$$

P3. Sea $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ definida como:

$$f(m, n) = (m + n, m - n)$$

i) Calcular explícitamente $f(0 \times [0, 4])$ y demostrar que $f^{-1}(\{1, 2\} \times \{3, 4\}) = \{\{2, -1\}, \{3, -1\}\}$

ii) Calcular los mismos conjuntos que en i) pero con f ahora definida como $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

P4. **(*)** Sea $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ conjunto finito de referencia y sea $f : A \longrightarrow A$ una función. Se define en $P(A) \setminus \{\emptyset\}$ la relación R dada por:

$$XRY \iff |f(X)| = |f(Y)|$$

i) Demuestre R es relación de equivalencia.

ii) Demuestre que si f es epiyectiva, entonces $A/R = \{[\{a_1, ..., a_i\}]_R : 1 \leq i \leq n\}$

P5. Sea U un conjunto de referencia. Se define en $P(U)$ la relación $\mathbf{R}$ definida como:

$$A\mathbf{R}B \iff \exists h : A \longrightarrow B \text{ biyectiva}$$

i) Demuestre que $\mathbf{R}$ es de equivalencia.

ii) Suponga que U es un conjunto finito, digamos $|U| = n$.
Para $A \in P(U)$, encuentre $[A]_{\mathbf{R}}$ y con esa información encuentre el conjunto cuociente.

P6. Sea E conjunto de referencia y $A \subseteq E$ un subconjunto fijo de E. Se define en $P(E)$ la relación $\mathbf{C}$ dada por:

$$X\mathbf{C}Y \iff X \cap A = Y \cap A$$

i) Demuestre que $\mathbf{C}$ es relación de equivalencia.

ii) Demuestre que $P(E)/\mathbf{C} = \{[B]_{\mathbf{C}} : B \in P(A)\}$

P7. (*) Se define en $\mathbb{Z}$ la relación R dada por :

$$aRb \iff 4|a^2+3b^2$$

Donde $m|n \iff n = km, k \in \mathbb{Z}$

i) Demuestre que la relación R es de equivalencia.

ii) De 2 elementos en $[0]_R$ y 2 elementos en $[1]_R$.

iii) Muestre que $mR1 \iff (m \equiv_4 1 \vee m \equiv_4 3)$.
Con esto, reescriba la definición de la clase de equivalencia del 1 en respecto a la relación R.
Indicación: Recuerde que $a \equiv_n b \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = kn$

iv) De manera similar, muestre que $mR0 \iff (m \equiv_4 0 \vee m \equiv_4 2)$

v) Con esto concluya que:

$$[0]_R = [0]_4 \cup [2]_4, \qquad [1]_R = [1]_4 \cup [3]_4, \qquad y \qquad \mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R\}$$

Donde escribimos $[a]_n = [a]_{\equiv_n}$ para hacer mas ligera la notación. (como aparece en el apunte)

P8. En $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se define la relación:

$$mRn \iff m|n \wedge (mn) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Demuestre que R es una relación de orden en $\mathbb{Z}$ y determine si es o no una relación de orden total.

P9. Sea $F = \{(A, f) : A \subseteq \mathbb{R} \wedge f : A \longrightarrow R \text{ función}\}$. Se define en F la relación Ω como:

$$(A, f)\Omega(B, g) \iff (A \subseteq B \wedge \forall x \in A : f(x) = g(x))$$

i) Demuestre que Ω es una relación de orden.

ii) ¿Es Ω una relación de orden total? Justifique