Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
4 de mayo de 2023

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 7: Relaciones

Profesor: Alexander Frank

Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. [**Materia**] Se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\equiv_n$ como:

$$a \equiv_n b \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = kn$$

i) Demuestre que la relación $\equiv_n$ es de equivalencia.

ii) Demuestre que el conjunto cuociente es $\mathbb{Z}/\equiv_n = \{[a]_{\equiv_n} :, 0 \leq a < n\}$, es decir, son las clases de equivalencia de los posibles restos de dividir un número entero por n.

Aclaración: Notar que en ii), en otras palabras se esta pidiendo demostrar que cualquier $z \in Z$ pertenece a alguna $[a]_{\equiv_n}$ con $0 \leq a < n$, y $z \in [a]_{\equiv^n} \iff z - a = kn, k \in \mathbb{Z} \iff z = kn + a, k \in \mathbb{Z}$. En vista de lo anterior, para abordar ii), les puede ser muy útil el siguiente teorema:

[**Teorema de la división entera**]
Sean $a, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, entonces existe un único par $q, r \in \mathbb{Z}$ tal que $a = qm + r$ y $0 \leq r < |m|$

P2. Sea $k \in \mathbb{R}$ fijo. Se define en $\mathbb{R}$ la relación Γ dada por:

$$x\Gamma y \iff |x + k| = |y + k|$$

i) Demuestre que Γ es una relación de equivalencia.

ii) Encuentre $[x]_\Gamma$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y con eso determinar $\mathbb{R}/\Gamma$.

P3. Sean X, Y conjuntos y $f : X \longrightarrow Y$ una función:

a) Sea R una relación de equivalencia definida en Y. Se define en Y la relación preimagen de R que notamos por $f^{-1}(R)$ por:

$$x_1 f^{-1}(R) x_2 \iff f(x_1) R f(x_2)$$

   i) Probar que $f^{-1}(R)$ es una relación de equivalencia.

   ii) Probar que $[x]_{f^{-1}(R)} = f^{-1}([f(x)]_R)$ para cada $x \in X$

b) [**Propuesto**] Suponga ahora que R' es una relación de equivalencia en X y que f es epiyectiva. Definimos en Y la relación imagen por:

$$y_1 f(R') y_2 \iff \exists x_1, x_2 \in X : f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2 \wedge x_1 R' x_2$$

   i) Probar que si f inyectiva entonces $f(R')$ es de equivalencia y además ocurre que $R' = f^{-1}(f(R'))$, es decir, R' es igual a la relación preimagen de $f(R')$

   ii) ¿Qué ocurre si f no fuera inyectiva?

P4. Se define en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ la relación ψ dada por:

$$(a,b)\psi(c,d) \iff ad = bc$$

i) Demuestre que ψ es relación de equivalencia en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

ii) Demuestre que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\})/\psi = \{[(a,b)]_\psi : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : MCD(a,b) = 1\}$
Donde $MCD(a,b)$ es el máximo común divisor entre a y b.

P5. **[Propuesto]** Sea E conjunto de referencia y $A \subseteq E$ un subconjunto fijo de E. Se define en $P(E)$ la relación $\mathbf{C}$ dada por:

$$X\mathbf{C}Y \iff X \cap A = Y \cap A$$

i) Demuestre que $\mathbf{C}$ es relación de equivalencia.

ii) Demuestre que $P(E)/\mathbf{C} = \{[B]_\mathbf{C} : B \in P(A)\}$

Resumen

Sea A un conjunto y R una relación de equivalencia definida sobre A.
[Clase de equivalencia] Para $x \in A$, se define la clase de equivalencia de x como todos los elementos de A con los x se relaciona vía R, es decir:

$$[x]_R := \{a \in A : aRx\} \subseteq A$$

[Conjunto Cuociente] Se define como el conjunto que contiene a todas las clases de equivalencia de la relación R en A, es decir:

$$A/R := \{[a]_R : a \in A\}$$

Observación: El conjunto A/R es una partición de A.
[Propiedades] Para todo $x, y \in A$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $[x]_R \subseteq [y]_R$

ii) $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$

iii) xRy

Obs: Notar que $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \iff [x]_R = [y]_R$