Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
21 de abril de 2023

Auxiliar Precontrol 2

Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Sean A, B conjuntos y se define $\phi : P(A) \times P(B) \longrightarrow P(A \cup B)$ como $\phi(X, Y) = X \cup Y$.

a) Demuestre que ϕ es epiyectiva

b) Demuestre que ϕ es inyectiva $\iff A \cap B = \emptyset$

P2. Sean f, g funciones con $f : A \longrightarrow B$ biyectiva y $g : C \longrightarrow D$ biyectiva, demuestre que la función $\gamma : A \times C \longrightarrow B \times D$ definida como:

$$\gamma(a, b) = (f(a), g(b))$$

también es biyectiva.

P3. Sea $A \subseteq \mathcal{U}$ no vacío. Se define $\mathcal{F}_A \subseteq P(\mathcal{U})$ por:

$$X \in F_A \iff X \subseteq \mathcal{U} \wedge X \cap A \neq \emptyset$$

- Demuestre que $U, A \in F_A$
- Demuestre que si $B, C \in P(\mathcal{U})$ y $B \in F_A$, entonces $B \cup C \in F_A$
- Demuestre que $(P(A) \setminus \{\emptyset\}) \subseteq F_A$

P4. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x + 1$ y $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-1}$. Encuentre dominio y recorrido apropiados para que $(g \circ f)$ sea biyectiva y encuentre su inversa.

P5. Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2\}$. Se define:

$$\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longrightarrow \phi(f) = f(2)$$

Demuestre que ϕ es biyectiva.

P6. Sea $\mathcal{F} = \{f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] : f \text{ es funcion }\}$ y $\alpha = \{f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] : f \text{ es funcion biyectiva }\}$. Se definen las siguientes funciones:

$$\Gamma : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1] \qquad\qquad \mathcal{I} : \alpha \longrightarrow \alpha$$
$$f \longrightarrow \Gamma(f) = \frac{f(0) + f(1)}{2} \qquad\qquad f \longrightarrow \mathcal{I}(f) = f^{-1}$$

a) Estudie inyectividad y epiyectividad de Γ

b) Pruebe que $\mathcal{I}(f \circ g) = \mathcal{I}(g) \circ \mathcal{I}(f)$

c) Pruebe que $\mathcal{I}$ es biyectiva

d) Demuestre que $(\Gamma \circ \mathcal{I})^{-1}(\{0\}) = \emptyset$

P7. Sea E conjunto de referencia y $\theta, \phi : P(E) \times P(E) \longrightarrow P(E) \times P(E)$ como:

$$\theta(A, B) = (B^c, A^c) \qquad\qquad \phi(A, B) = (A \cup B, A \cap B)$$

Estudie inyectividad y epiyectividad de ϕ y θ

P8. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$

a) Demostrar que no existe $x \in R \setminus \{2\}$ tal que $f(x) = 2$

b) Demostrar que f es inyectiva

c) Restrinja el dominio de f para que sea epiyectiva y calcule su inversa.

P9. Sea $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función definida por:

$$f(n) = \begin{cases} -n, & n \text{ impar} \\ \dfrac{n}{2} - 3 & n \text{ par} \end{cases}$$

Estudie inyectividad y epiyectividad de f. Luego, cambie dominio y recorrido necesariamente para que f sea biyectiva y encuentre la inversa de la función modificada.

P10. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Demuestre que el conjunto $\Phi = \{\{x \in A : f(x) = y\} : y \in B\}$ cubre el conjunto A y que sus elementos son disjuntos de a pares. ¿Cuando Φ es una partición de A?

P11. Para $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$ no puede ser escrito como producto cartesiano de dos conjuntos A, B.

P12. Si $A \subseteq E$ y $B \subseteq F$, demostrar:

$$(E \times F) \setminus (A \times B) = ((E \setminus A) \times F) \cup (E \times (F \setminus B))$$