Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
21 de abril de 2023

Auxiliar 5: Inyectividad y Epiyectividad de funciones

Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Sea $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función definida por:

$$f(n) = \begin{cases} -2n+5, & n \text{ impar} \\ \dfrac{n}{2} & n \text{ par} \end{cases}$$

Estudie inyectividad y epiyectividad de f. Luego, cambie dominio y recorrido necesariamente para que f sea biyectiva y encuentre la inversa de la función modificada.

P2. Sea $[k] := \{0, 1, 2, ..., k\}$, con $k \in \mathbb{N}$ fijo. Se define la función $g : P([k]) \longrightarrow [k]$ como $g(X) = \text{Max}(X)\text{-Min}(X)$, donde $\text{Max}(X)$ es el elemento mas grande del conjunto X y $\text{Min}(X)$ es el elemento mas pequeño del conjunto X, con la convención $\text{Max}(\{\emptyset\}) = Min(\{\emptyset\}) = 0$
Demuestre que g es epiyectiva, pero no es inyectiva.

P3. Sea $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que

$$f(x) = (a, b, c)$$

Donde a es el exponente del 2 en la descomposición prima de x, b es el exponente del 3 en la descomposición prima de x y c es el exponente del 5 en la descomposición prima de x.
Por ejemplo $f(24) = (3, 1, 0)$ pues $24 = 2^3 \cdot 3^1$ y $f(105) = (0, 1, 1)$ pues $105 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$.
(Notar que si un primo no divide a x, aparece en la descomposición prima con exponente 0)
También con la convención $f(1) = (0, 0, 0)$.

a) ¿Es f epiyectiva? De no serlo, restrinja el Codominio de manera que la nueva función definida sea epiyectiva. (especifíquelo)

b) Muestre que f no es inyectiva, pero si el dominio de f se restringe al conjunto

$$D = \{n \in \mathbb{N} | n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c; a, b, c \in \mathbb{N}\}$$

entonces f es biyectiva.

c) Explicite la inversa de la función f que tiene su dominio y codominio restringidos según *a)* y *b)*.

<u>Indicación</u>: Para este ejercicio asumiremos como cierto el siguiente teorema:

[Teorema fundamental de la aritmética]
Todo entero positivo $n > 1$ puede escribirse de **una única manera** como un producto de potencias de números primos, es decir:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m}$$

Donde $p_1 < p_2 < ... < p_m$ son número primos y α_i son enteros positivos.

P4. **[Propuesto]** Sean A, B conjuntos y se define $\phi : P(A) \times P(B) \longrightarrow P(A \cup B)$ como $\phi(X, Y) = X \cup Y$.

a) Demuestre que ϕ es epiyectiva

b) Demuestre que ϕ es inyectiva $\iff A \cap B = \emptyset$

P5. **[Propuesto]** Sean f, g funciones con $f : A \longrightarrow B$ biyectiva y $g : C \longrightarrow D$ biyectiva, demuestre que la función $\gamma : A \times C \longrightarrow B \times D$ definida como:

$$\gamma(a, b) = (f(a), g(b))$$

también es biyectiva.

Resumen

Una función $f : A \longrightarrow B$ se dice:

- **Epiyectiva** si se cumple que $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$
- **Inyectiva** si se cumple que $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- **Biyectiva** si es inyectiva y biyectiva a la vez

[Función Inversa]
Dada una función $f : A \longrightarrow B$ biyectiva, se define la función inversa de f denotada $f^{-1} : B \longrightarrow A$, como la función de B en A dada por:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

Para una función $f : A \longrightarrow B$ y su inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$ tenemos las siguientes propiedades:

- $\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x$
- $\forall y \in B, f(f^{-1}(y)) = y$

[Función Composición]
Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones, la *composicion* de f y g, la cual denotaremos por $g \circ f$, se define como la función de A en C dada por:

$$\forall x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Proposiciones
Si $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva, entonces $f \circ f^{-1} = Id_B$ y $f^{-1} \circ f = Id_A$