Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
14 de abril de 2023

Auxiliar 4: Conjuntos e introducción a funciones

Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Sean $A, B \subseteq E$ y $C, D \subseteq F$. Demuestre que:

a) $(E \setminus A) \times F = (E \times F) \setminus (A \times F)$

b) $(A \setminus B) \times (C \setminus D) \subseteq (A \times C) \setminus (B \times D)$. ¿Qué puede decir sobre la igualdad?

c) $[(A \neq \emptyset) \wedge (A \times C = A \times D)] \implies C = D$

d) **[Propuesto]** Para $r \in \mathbb{R}, C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$ no puede ser escrito como producto cartesiano de dos conjuntos A, B

e) **[Propuesto]** $(E \times F) \setminus (A \times B) = ((E \setminus A) \times F) \cup (E \times (F \setminus B))$

P2. Determine si los siguientes conjuntos son particiones de los conjuntos correspondientes:

a) Para $m, n \in \mathbb{R}$ se define $L_{m,n} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + n\}$, entonces $L = \{L_{m,n} : n \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}\}$ es una partición de $\mathbb{R}^2$

b) Se define $B_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, luego $C = \{B_r : r \geq 0\}$ es partición de $\mathbb{R}^3$

c) $C = \{[a - 5, a + 5] : a = 10k, k \in \mathbb{N}\}$ es partición de $\mathbb{R}$

d) **[Propuesto]** Sea X conjunto de referencia y sean $\mathbf{M}, \mathbf{N} \subseteq P(X)$ dos particiones de X.Definimos el conjunto R_c como:

$$R_c = \{A \cap B : A \in \mathbf{M}, B \in \mathbf{N}, A \cap B \neq \emptyset\}$$

Demuestre que R_c es partición de X.

e) **[Propuesto]** Para $n, k \in \mathbb{N}$ se define $R_{n,k} = \{z \in \mathbb{N} : z = np + k, p \in \mathbb{N}\}$. Entonces si n es fijo, la colección $R_n = \{R_{n,k} : k \in \{0, 1, ..., n - 1\}\}$ es una partición de $\mathbb{N}$.

P3. Sea E conjunto de referencia. Dado $A \subseteq E$, se definen las *semi-partes* de A como:

$$S(A) = \{B \subseteq E : A \cap B \neq \emptyset\}$$

a) Pruebe que $P(A) \setminus \{\emptyset\} \subseteq S(A)$

b) Pruebe que $S(A)^c = P(A^c)$

c) Sean $A, B \subseteq E$. Pruebe que:

- $S(A \cap B) \subseteq S(A) \cap S(B)$
- $S(A \cup B) = S(A) \cup S(B)$

d) Pruebe que $P(E) = S(A) \cup S(A^c) \cup \{\emptyset\}$

P4. Sean A, B subconjuntos de un mismo conjunto de referencia E. Pruebe que:

$$A \cap B = \emptyset \iff P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$$

P5. Indique cuales de los siguientes conjuntos son grafos de funciones.
En caso de no serlo, proponga nuevo dominio A y recorrido B para que la relación establecida entre x e y represente el grafo de una función en $A \times B$.

i) $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 5\}$
ii) $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 5\}$
iii) $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\}$
iv) $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 = 5\}$

Resumen

[**Producto cartesiano**] Se define el producto cartesiano de $A \subseteq E$ con $B \subseteq E$, denotado $A \times B$, como el conjunto depares ordenados (a,b) tales que $a \in A$ y $b \in B$. Formalmente:

$$\forall a \in E, \forall b \in F, (a,b) \in A \times B \iff a \in A \wedge b \in B$$

En general, se define el producto cartesiano de los conjuntos $A_1, ..., A_n$, $A_i \subseteq E$, para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, denotado $A_1 \times ... \times A_n$, por:

$$\forall a_1 \in E_1, ..., \forall a_n \in E_n, (a_1, ..., a_n) \in A_1 \times ... \times A_n \iff \forall i \in \{1, 2, ..., n\}, a_i \in A_i$$

[**Algunas propiedades**] Si $A, A' \subseteq E$ y $B.B' \subseteq F$, entonces:

- $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset, \qquad A \subseteq A' \wedge B \subseteq B \implies A \times B \subseteq A' \times B'$
- $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B'), \qquad (A \times B) \cup (A' \times B') \subseteq (A \cup A') \times (B \cup B')$
- $(A \cup A') \times B = (A \times B) \cup (A' \times B), \qquad (A \cap A') \times B = (A \times B) \cap (A' \times B)$
- $A \times (B \cup B') = (A \times B) \cup (A \times B'), \qquad A \times (B \cap B') = (A \times B) \cap (A \times B')$

[**Conjunto Potencia**] Llamamos conjunto potencia de A (o partes de A) denotado $P(A)$, al conjunto de todos los subconjuntos de A. Entonces $P(A)$ queda determinado por:

$$(C \in P(A) \iff \forall x \in E, x \in C \implies x \in A) \quad \text{o bien} \quad (C \in P(A) \iff C \subseteq A)$$

Ejemplo: Si $A = \{1,4,7\}$, entonces $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}.\{7\}, \{1,4\}, \{1,7\}, \{4,7\}, \{1,4,7\}\}$

[**Algunas Propiedades**]

- $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$
- $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

[**Partición de conjuntos**] Se dice que $C \subseteq P(A)$ es *partición* de A si cumple las siguientes condiciones:

- La colección C cubre A, es decir $A = \bigcup\limits_{X \in C} X$
- Los conjuntos de la colección son disjuntos entre sí: $\forall X, Y \in C$, si $X \neq Y$, entonces $X \cap Y = \emptyset$
- Ningún elemento de la partición es vacío: $\forall X \in C, X \neq \emptyset$