

### Auxiliar 3: Principio de Inducción y Conjuntos

Profesor: Alexander Frank

Auxiliar: Gonzalo Ovalle

**P1.** Demuestre por inducción las siguientes proposiciones:

- $\forall n \geq 10, n^3 < 2^n$
- $(\forall n \geq 2), n^n \geq 2 \cdot n!$
- Demuestre que  $\forall n \in \mathbb{N}, 7 | 6^{2n+1} + 8^{2n}$
- Muestre que  $3^{n+1}$  divide a  $2^{3^n} + 1$  para cada entero mayor o igual a 0.

**P2.** Considere la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida como sigue:

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_n = 3(a_{n-1} + a_{n-2}) + 1, \quad \forall n \geq 3$$

Demuestre que  $a_{3n+2} - 1$  es un número par.

**P3.** Se tienen  $3^n$  monedas de aspecto idéntico, excepto que una de ellas es falsa y pesa menos que las demás. Muestre cómo con una balanza de platillos se puede identificar la moneda falsa en  $n$  pesadas. Nota: Una balanza de platillos es una balanza con dos platillos que quedan al mismo nivel si el objeto colocado en cada uno de los platillos pesa lo mismo.

**P4.** Sean  $A, B, C$  conjuntos. Demuestre que:

- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
- $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
- $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \implies A \cup B \subseteq C$
- $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \implies C \subseteq A \cap B$

**P5.** Sean  $A, B, X, Y$  conjuntos no vacíos, y  $X \subseteq Y$ . Demuestre que:

$$A \cap [X \cup (B \setminus (A \setminus X))] \subseteq A \cap Y$$

**P6. [Propuesto]** Todo  $n$  mayor o igual que 24 se puede expresar como la suma de cinco y/o siete.

**P7. [Propuesto]** Si  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  son números enteros positivos, demuestre que se tiene la siguiente desigualdad:

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$$

## Resumen

### Principio de Inducción

Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  y  $P(n)$  es un predicado en el conjunto de referencia de los  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $n \geq n_0$ , entonces:

$$[P(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0 + 1, P(n_0) \wedge P(n_0 + 1) \wedge \dots \wedge P(n - 1) \implies P(n))] \iff (\forall n \geq n_0, P(n))$$

### Algunas Propiedades de Conjuntos

Sea  $E$  conjunto de referencia.

- $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \implies A \cap C \subseteq B \cap D \wedge A \cup C \subseteq B \cup D$
- $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- $A/B := A \cap B^c$
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$
- $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A$
- $A \cap E = A, A \cup E = A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$   
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$   
 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap B = \emptyset \implies A \subseteq B^c \wedge B \subseteq A^c$