Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
24 de marzo de 2023

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 2: Lógica Proposicional

Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Demuestre la veracidad o la falsedad de los siguientes enunciados utilizando contradicción/reducción al absurdo:

- $(\exists x \in \mathbb{R}/\{0\})[(x \in \mathbb{R}^+) \wedge (x \in \mathbb{R}^-)]$
- $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x \geq y$
- Si $n^3 + 5$ es impar, entonces n es par.
- Existen infinitos numeros primos.

P2. Andrea y Juanito estan estudiando para una prueba de lógica. Para ello definen las siguientes proposiciones:

- $H(x)$: "x es hermano de Andrea"
- $S(x)$: "x esta tomando un ramo"
- $G(x)$: "x esta cursando geometría"
- $B(x)$: "x esta cursando biología"
- $J(x)$: "x es amigui de Juanito"
- $D(x)$: "x toca la batería"

Sea P el conjunto donde estan definidas estas funciones proposicionales. Construya las proposiciones cuantificadas descritas en las siguientes afirmaciones:

- Andrea tiene al menos un hermano.
- Andrea no tiene hermanos.
- Juanito tiene exactamente 1 amigui
- Andrea tiene al menos dos hermanos.
- Todas las personas toman al menos un ramo.
- Juanito tiene amiguis que cursan biología y geometría.
- Juanito no tiene amiguis que toquen la batería.

P3. Sea E conjunto de referencia, determine si las siguientes proposiciones cuantificadas son tautologías o no. Adicionalmente, niegue las proposiciones:

- $(\exists y)[p(y) \implies (\forall x)p(x)]$
- $(\forall x \in E, p(x) \wedge q(x)) \iff (\forall x \in E, p(x)) \wedge (\forall x \in E, q(x))$
- $(\forall x \in E, p(x) \vee q(x)) \iff (\forall x \in E, p(x)) \vee (\forall x \in E, q(x))$

P4. Sean A y B conjuntos no vacíos y sean $p(x)$, $q(x)$ funciones proposicionales. Asumiendo que las siguientes proposiciones son verdaderas:

$$R: \qquad (\exists x \in A)(\exists x' \in A) \quad (p(x) \iff \overline{p(x')})$$

$$S: \qquad (\forall x \in A)(\exists y \in B) \quad (p(x) \implies q(y))$$

$$T: \qquad (\forall x \in A)(\exists y \in B) \quad (q(y) \implies p(x))$$

Demuestre que se tienen las siguientes afirmaciones:

- $(\exists x \in A)p(x) \wedge (\exists x \in A) \quad \overline{p(x)}$
- $(\exists y \in B)q(y) \wedge (\exists y \in B) \quad \overline{q(y)}$

Resumen

Definiciones

- Una función proposicional $p(x)$ es una clase de proposicion lógica que adquiere un valor de verdad al evaluarla en x.
- Los cuantificadores suelen ser expresiones utilizadas para referirse a un conjunto en particular de datos. Algunos utilizados en gran cantidad son:
  1. Cuantificador universal ($\forall$), se lee "para todo".
  2. Cuantificador existencia ($\exists$), se lee "existe"
  3. Cuantificador de unica existencia ($\exists!$), se lee "existe un unico".
- La negación de cuantificadores en proposiciones es como sigue:
  - $\overline{[\forall x \in A, p(x)]} \iff [\exists x \in A, \overline{p(x)}]$
  - $\overline{[\exists x \in A, p(x)]} \iff [\forall x \in A, \overline{p(x)}]$
  - $\overline{[\exists! x \in A, p(x)]} \iff [\forall x \in A, \overline{p(x)}] \vee [\exists x, y \in A, p(x) \wedge p(y) \wedge x \neq y]$