

P1

$$a) \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} (a < b) \wedge (c < d) \Rightarrow (a+b)(c+d) < 2(ac+bd)$$

Primero veremos la forma viruta en auxiliar y luego una forma alternativa.

1ª forma Supongamos que no se cumple la propiedad a), lo cual correspondería a que

$$\exists a, b, c, d \in \mathbb{R} [(a < b) \wedge (c < d)] \wedge (a+b)(c+d) \geq 2(ac+bd)$$

* Recordemos de Intro. al Álgebra que $\forall x (p(x) \Rightarrow q(x)) \Leftrightarrow \exists x (p(x) \wedge \neg q(x))$

$$\Rightarrow \cancel{ac+ad} + ac + ad + bc + bd \geq ac + bd + ac + bd \quad / -ac - bd - ac - bd$$

$$\Rightarrow ad + bc - ac - bd \geq 0$$

$$\Rightarrow a(d-c) - b(d-c) \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(d-c) \geq 0, \text{ pero } a < b \wedge c < d \Rightarrow a-b < 0 \wedge 0 < d-c$$

$$\Rightarrow (a-b)(d-c) < 0$$

lo cual es una contradicción $\neq$

Entonces, la propiedad a) es verdadera.

2ª forma Estudiaremos la expresión $(a+b)(c+d)$ con axiomas de los reales

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= ac + ad + bc + bd \\&= ac + ad + bc + bd - 2(ac + bd) + 2(ac + bd) \\&= ac + ad + bc + bd - (ac + bd) - (ac + bd) + 2(ac + bd) \\&= ad + bc - ac - bd + 2(ac + bd) \\&= a(d-c) - b(d-c) + 2(ac + bd) \\&= (a-b)(d-c) + 2(ac + bd)\end{aligned}$$

Por otro lado, si asumimos la parte izquierda de la implicancia para realizar una demostración directa, sabemos que

$$\begin{aligned}\left. \begin{aligned} \bullet a < b &\Rightarrow a - b < 0 \\ \bullet c < d &\Rightarrow 0 < d - c \end{aligned} \right\} &\Rightarrow (a-b)(d-c) < 0 \\ &\Rightarrow (a-b)(d-c) + 2(ac + bd) < 2(ac + bd)\end{aligned}$$

Como $(a+b)(c+d) = (a-b)(d-c) + 2(ac + bd)$, entonces

$$(a+b)(c+d) < 2(ac + bd) \quad \square$$

$$b) \forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \quad a \neq b \Rightarrow \frac{1}{a^{-1}+b^{-1}} < \frac{a+b}{2}$$

Para estudiar la veracidad de esta expresión buscaremos expresiones equivalentes

$$\frac{1}{a^{-1}+b^{-1}} < \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \frac{a+b}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{b+a}{ab}} < \frac{a+b}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2ab < (a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow 2ab < a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < a^2 + b^2$$

Sabemos que $a^2 > 0$ y $b^2 > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > 0$, entonces la proposición es verdadera porque

$$(a^2 > 0) \wedge (b^2 > 0) \Rightarrow a^2 + b^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{a^{-1}+b^{-1}} < \frac{a+b}{2} \quad \square$$

$$d) \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 < x \Rightarrow x^3 < x^2$$

- Si $x > 0$, entonces $x^2 < x \Rightarrow x^3 < x^2$ multiplicando por x ambos lados
- Si $x < 0$, entonces $x^2 < x \Rightarrow x^3 > x^2$, pero notemos que

$$x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x-1) < 0 \Leftrightarrow (x < 0 \wedge x-1 \geq 0) \vee (x \geq 0 \wedge x-1 < 0)$$

Pero $x < 0 \Rightarrow x-1 < -1 < 0 \Rightarrow x-1 < 0$, entonces no hay ningún $x < 0$ que cumpla $x^2 < x$, por lo que ese caso no nos interesa (¿Por qué? Estudiar comportamiento de la implicancia)
Así, la proposición es verdadera.

$$e) \forall x \in \mathbb{R} \quad x^3 < x^2 \Rightarrow x^2 < x$$

- Si $x > 0$, entonces $x^3 < x^2 \Rightarrow x^3 \cdot \frac{1}{x} < x^2 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 < x$
- Si $x = 0$ entonces $x^3 = x^2 = 0$
- Si $x < 0$, notemos que $x^3 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) < 0$

Como $x^2 > 0 \forall x < 0$, basta con que $x-1 < 0$, lo cual se tiene porque $x < 0 \Rightarrow x-1 < -1 < 0$.

Entonces, la proposición es falsa

P2]

$$a) \frac{x}{x-1} \leq \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq 2$$

$$P.C. = \{1, 2\}$$

$$\underline{x < 1}$$

$$x \geq \frac{(x-1)^2}{x-2} \Rightarrow x(x-2) \leq (x-1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x \leq x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 \Rightarrow \text{Verdadero } \forall x < 1$$

$$\underline{1 < x < 2}$$

$$x \leq \frac{(x-1)^2}{x-2} \Rightarrow x(x-2) \geq (x-1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x \geq x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow 0 \geq 1 \neq \text{Falso } \forall x \in (1, 2)$$

$$\underline{x > 2}$$

$$x \leq \frac{(x-1)^2}{x-2} \Rightarrow x(x-2) \leq (x-1)^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 \Rightarrow \text{Verdadero } \forall x > 2$$

$$\boxed{\therefore x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty^+)}$$

$$b) \frac{x^3 + x^2 + x}{|x-2|-1} \leq 0$$

$$P.C. = \{2\}$$

$$\underline{x \geq 2} \mid \frac{x^3 + x^2 + x}{x-2-1} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^3 + x^2 + x}{x-3} \leq 0 \Rightarrow x \neq 3, P.C. = \{3\}$$

$$\hookrightarrow \underline{x > 3} \mid x^3 + x^2 + x \leq 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 \leq 0$$

La parábola $x^2 + x + 1$ es positiva y de discriminante -4 por lo que es positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, lo cual es una contradicción

$$\hookrightarrow \underline{2 \leq x < 3} \mid x^2 + x + 1 \geq 0 \text{ verdadera por lo anterior}$$

$$\text{Ahora, } \underline{x < 2} \mid \frac{x^3 + x^2 + x}{-(x-2)-1} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^3 + x^2 + x}{1-x} \leq 0 \Rightarrow x \neq 1, P.C. = \{1\}$$

$$\hookrightarrow \underline{1 < x < 2} \mid x^2 + x + 1 \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\hookrightarrow \underline{x < 1} \mid x^2 + x + 1 \leq 0 \quad \times$$

$$\boxed{\therefore x \in (1, 2) \cup [2, 3) = (1, 3)}$$