MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.
Profesor: Yamit Yalanda.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
6 de julio de 2023

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 12

$D_x$erivadas

Problema 1. *Calcule $D_x f$ en los siguientes casos:*

a) $f(x) = \sin(x + x^2)$

b) $f(x) = \sin(\cos(x))$

c) $f(x) = \frac{\sin(\cos(x))}{x}$

d) $f(x) = \sin(\cos(\sin(x)))$

e) $f(x) = \sin((x + 1)^2(x + 2))$

f) $f(x) = \sin^2 x \sin x^2 \sin^2 x^2$

Solución. *a)* $D_x \sin(x + x^2) = \sin'(x + x^2)D_x(x + x^2) = \cos(x + x^2)(1 + 2x)$.

b) $D_x \sin(\cos(x)) = \sin'(\cos(x)) \cos'(x) = \cos(\cos(x))(-\sin(x)) = -\sin(x) \cos(\cos(x))$.

c) $D_x \frac{\sin(\cos(x))}{x} = \frac{(D_x \sin(\cos(x)))x - \sin(\cos(x))D_x x}{x^2} = \frac{-\sin(x)\cos(\cos(x))x - \sin(\cos(x))}{x^2}$.

d) $D_x \sin(\cos(\sin(x))) = D_x(\sin \circ \cos)(\sin(x)) = (\sin \circ \cos)'(\sin(x)) \sin'(x) = -\sin(\sin(x)) \cos(\cos(\sin(x))) \cos(x)$. Otra solución:

$$\begin{aligned}
D_x \sin(\cos(\sin(x))) &= \sin'(\cos(\sin(x)))D_x \cos(\sin(x)) \\
&= \cos(\cos(\sin(x))) \cos'(\sin(x)) \sin'(x) \\
&= \cos(\cos(\sin(x)))(-\sin(\sin(x))) \cos(x) \\
&= -\sin(\sin(x)) \cos(\cos(\sin(x))) \cos(x).
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
D_x \sin((x + 1)^2(x + 2)) &= \sin'((x + 1)^2(x + 2))D_x(x + 1)^2(x + 2) \\
&= \cos((x + 1)^2(x + 2))[(x + 2)D_x(x + 1)^2 + (x + 1)^2 D_x(a + 2)] \\
&= \cos((x + 1)^2(x + 2))[(x + 2)2(x + 1) + (x + 1)^2]
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
D_x \sin^2 x \sin x^2 \sin^2 x^2 &= (D_x \sin^2 x) \sin x^2 \sin^2 x^2 + \sin^2 x D_x \sin x^2 \sin^2 x^2 \\
&= 2 \sin(x) \sin'(x) \sin x^2 \sin^2 x^2 + \sin^2 x[(D_x \sin x^2) \sin^2 x^2 + \sin x^2 D_x \sin^2 x^2] \\
&= 2 \sin(x) \cos(x) \sin x^2 \sin^2 x^2 + \sin^2 x[\sin'(x^2)2x \sin^2 x^2 + \sin x^2 2 \sin(x^2) \sin'(x^2)2x] \\
&= 2 \sin(x) \cos(x) \sin x^2 \sin^2 x^2 + \sin^2 x[2x \cos(x^2) \sin^2 x^2 + 2 \sin x^2 \sin(x^2) \cos(x^2)2x] \\
&= 2 \sin(x) \cos(x) \sin(x^2) \sin^2(x^2) + 2x \sin^2(x) \cos(x^2) \sin^2(x^2) + 2 \sin^2(x) \sin^2(x^2) \cos(x^2)2x
\end{aligned}$$

□

Problema 2. *a)* *Sean $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ funciones diferenciables de (a,b) a $\mathbb{R}$. Notemos que, para cada $x \in (a,b)$ "fijo", $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$. ¿Es verdad que*

$$\forall x \in (a,b),\ \lim_{n\to\infty} D_x f_n(x) = D_x \lim_{n\to\infty} f_n(x)?$$

Hint: $f_n(x) = x/(1+n^2x^2)$.

b) *Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante $x \mapsto b\sin(x) + a\cos(x)$. Muestre que f satisface el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\left.\begin{aligned} f'' + f &= 0,\\ f(0) &= a,\\ f'(0) &= b. \end{aligned}\right\}$$

Notemos que con esto, $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f(x)$ y basta con saber el valor de f para saber el valor de f''.

Solución. *a)* Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_n\colon (-1,1) &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{x}{1+n^2x^2}. \end{aligned}$$

Sea $x \in (-1,1)$ y calculemos primero $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{x/n^2}{1/n^2 + x^2} \to \frac{0}{x^2} = 0.$$

Con esto, $\forall(-1,1),\ D_x \lim_{n\to\infty} f_n(x) = D_x 0 = 0$. Calculemos ahora, primero, $D_x f_n(x)$:

$$\begin{aligned} D_x f_n(x) &= D_x \frac{x}{1+n^2x^2}\\ &= \frac{(D_x x)(1+n^2x^2) - x(D_x 1 + n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}\\ &= \frac{(1+n^2x^2) - x(n^2 2x)}{(1+n^2x^2)^2}\\ &= \frac{1+n^2x^2 - 2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}\\ &= \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \end{aligned}$$

con lo que, si $x \in (-1,1)$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} D_x f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2x^2}{1+2n^2x^2+n^4x^4} = \begin{cases} 1, & x = 0\\ 0, & 0 < |x| < 1. \end{cases}$$

con lo que $\exists x \in (-1,1),\ \lim_{x\to\infty} D_x f(x) \neq D_x \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

b) Se tiene que $f(0) = b\sin(0) + a\cos(0) = a$. Además, $f'(x) = b\cos(x) - a\sin(x)$ con lo que $f'(0) = b\cos(0) - a\sin(0) = b$. Se tiene, además, $f''(x) = -b\sin(x) - a\cos(x)$. Con esto, $f''(x) + f(x) = -b\sin(x) - a\cos(x) + b\sin(x) + a\cos(x) = 0$ y se concluye.

□

Problema 3. *El área entre dos círculos concéntricos que están variando es, en todo minuto, $9\pi\,cm^2$ La tasa en la que varía el círculo más grande es $10\pi\,cm^2/s$. ¿Que tan rápido está cambiando el perímetro del círculo más pequeño cuando su área es $16\pi\,cm^2$?*

Solución. Sea $r_1(t)$ el radio de el círculo pequeño en el tiempo t y $r_2(t)$ el área del círculo grande en el tiempo t (ambos en cm). Con esto, $0 < r_1(t) < r_2(t)$. Sea, para $i \in \{1, 2\}$, $A_i(t) = \pi r_i(t)^2$ y $P_1(t) = 2\pi r_1(t)$. Queremos $D_t P_1(t) \mid_{t=\tau}$ donde τ es tal que $A_1(\tau) = 16\pi$. Es decir, queremos calcular $2\pi r_1'(\tau)$ tal $\pi r_1(\tau)^2 = 16\pi$. Es decir, queremos calcular $2\pi r_1'(\tau)$ tal que $r_1(\tau) = 4$. Intentaremos encontrar r_1' con respecto a r_1:

La geometría del problema nos impone

$$\begin{aligned} A_2(t) - A_1(t) &= 9\pi, \\ A_2'(t) &= 10\pi. \end{aligned}$$

De la primera ecuación ($\pi r_2(t)^2 - \pi r_1(t)^2 = 9\pi$), derivando, se sigue que $2r_2(t)r_2'(t) - 2r_1(t)r_1'(t) = 0$ con lo que $2r_2(t)r_2'(t) = 2r_1(t)r_1'(t)$. De la segunda ecuación, se sigue que $2\pi r_2(t)r_2'(t) = 10\pi$ con lo que, con el resultado de la primera ecuación, se tiene que $2\pi r_1(t)r_1'(t) = 10\pi$ con lo que concluimos que

$$r_1'(t) = \frac{5}{r_1(t)}.$$

Con esto, el problema es: Queremos calcular $2\pi \frac{5}{r_1(\tau)}$ tal que $r_1(\tau) = 4$, es decir, lo que queremos calcular es $2\pi \frac{5}{4}$ y se termina el problema: $5\pi/2$. □

Problema 4. *a) Sea f cualquier función definida en (a, b). Si x es un punto máximo (o mínimo) para f en (a, b) y f diferenciable en x, muestre que $f'(x) = 0$.*

Solución. 1. Partiremos con $f(x)$ es máximo: Si h es cualquier número tal que $x + h$ está en (a, b), entonces

$$f(x) \geq f(x + h),$$

pues f alcanza su máximo en (a, b) en x. Esto significa que

$$f(x + h) - f(x) \leq 0.$$

Entonces, si $h > 0$ tenemos

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0.$$

y como consecuencia

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0.$$

Por otro lado, si $h < 0$, tenemos

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

entonces

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Por hipótesis, f es diferenciable en x, entonces estos dos límites tienen que ser iguales, de hecho, son iguales a $f'(x)$. Esto significa que

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{y} \quad f'(x) \geq 0,$$

de donde se sigue que $f'(x) = 0$.

Si $f(x)$ es mínimo, entonces definimos $g = -f$ con lo que $g(x)$ es máximo y, por lo recién demostrado, $g'(x) = 0$ con lo que $-f'(x) = 0$ y se concluye lo que se quería.

□

Problema 5. [3 puntos] *Sean $f, g, k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x) \leq k(x).$$

Si además se sabe que f y k son derivables en 0, que $f'(0) = k'(0) = D$ y $f(0) = k(0)$, entonces g es derivable en 0 y $g'(0) = D$.

Solución. Se tiene que $f(0) \leq g(0) \leq k(0)$ con lo que $g(0) = f(0) = k(0)$. Sea $h > 0$, entonces,

$$\begin{aligned}
f(h) \leq g(0) \leq k(0) &\implies f(h) - f(0) \leq g(h) - g(0) \leq k(h) - k(0) \\
&\implies \frac{f(h) - f(0)}{h} \leq \frac{g(h) - g(0)}{h} \leq \frac{k(h) - k(0)}{h} \\
&\implies \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{k(h) - k(0)}{h} \\
&\implies \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} \leq \lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} \\
&\implies f'(0) \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} \leq k'(0) \\
&\implies D \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} \leq D \\
&\implies \lim_{h \to 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = D.
\end{aligned}$$

Sea ahora $h < 0$. Se tiene

$$\begin{aligned}
f(h) \leq g(0) \leq k(0) &\implies f(h) - f(0) \leq g(h) - g(0) \leq k(h) - k(0) \\
&\implies \frac{f(h) - f(0)}{h} \geq \frac{g(h) - g(0)}{h} \geq \frac{k(h) - k(0)}{h} \\
&\implies \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} \geq \lim_{h \to 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h} \geq \lim_{h \to 0^-} \frac{k(h) - k(0)}{h} \\
&\implies \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \geq \lim_{h \to 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h} \geq \lim_{h \to 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} \\
&\implies f'(0) \geq \lim_{h \to 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h} \geq k'(0) \\
&\implies D \geq \lim_{h \to 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h} \geq D \\
&\implies \lim_{h \to 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h} = D.
\end{aligned}$$

con lo que

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0) = D.$$

□

Problema 6. [3 puntos] *Calcule las siguientes derivadas:*

a) $f(x) = \sin(x)^x$

b) $f(x) = \log\left(\frac{(1-x)^{7/2}}{(1+x^2)^{11/3}}\right)$.

Solución. a)

$$
\begin{aligned}
D_x \sin(x)^x &= D_x e^{x\log(\sin(x))} \\
&= D_{x\log(\sin(x))} e^{x\log(\sin(x))} D_x x \log(\sin(x)) \\
&= e^{x\log(\sin(x))}[\log(\sin(x)) + x D_x \log(\sin(x))] \\
&= e^{x\log(\sin(x))}[\log(\sin(x)) + x \log'(\sin(x)) \sin'(x)] \\
&= e^{x\log(\sin(x))}[\log(\sin(x)) + x \cos(x)/\sin(x)] \\
&= e^{x\log(\sin(x))}[\log(\sin(x)) + x \cot(x)] \\
&= \sin(x)^x[\log(\sin(x)) + x \cot(x)]
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
D_x \log\left(\frac{(1-x)^{7/2}}{(1+x^2)^{11/3}}\right) &= D_x[\log((1-x)^{7/2}) - \log((1+x^2)^{11/3})] \\
&= D_x\left[\frac{7}{2}\log(1-x) - \frac{11}{3}\log(1+x^2)\right] \\
&= \frac{7}{2} D_x \log(1-x) - \frac{11}{3} D_x \log(1+x^2) \\
&= \frac{7}{2}\log'(1-x)(-1) - \frac{11}{3}\log'(1+x^2)(2x) \\
&= \frac{7}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{11}{3}\frac{2x}{1+x^2} \\
&= \frac{7}{2(x-1)} - \frac{22x}{3(1+x^2)}
\end{aligned}
$$

$\square$