MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.
Profesor: Yamit Yalanda.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
19 de junio de 2023

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 11

Limites en $\overline{\mathbb{R}}$

Problema 1. ***(3.0 pts)*** *Sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y considere la función $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida mediante*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{bx}, & x < 0 \\ \dfrac{e^{bx} - 1}{x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Encuentre una relación entre los reales a y b para que $\lim_{x\to 0} f(x)$ exista.

Solución. Calcularemos primero $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y luego $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Luego resolveremos la ecuación en (a, b),

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x).$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{bx} - 1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} b\frac{e^{bx} - e^0}{bx - 0} \\ &= b \lim_{x\to 0} \frac{e^{bx} - e^0}{bx - 0} \\ &= b \end{aligned}$$

Donde se usó la propiedad 11.10(2) de apunte. Además,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(ax)}{bx} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{a}{b}\frac{\sin(ax)}{ax} \\ &= \frac{a}{b} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} \\ &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

donde se usó la sección 12.7 del apunte para calcular el último límite.

Con esto, como queremos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x).$$

se sigue que, para que el límite exista, se necesita

$$b = \frac{a}{b}$$

Es decir, $a = b^2$. □

Problema 2. 1. *Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un una función con dominio no-acotado tal que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Muestre que $\lim_{x\to\infty} |f|(x) = \infty$.

2. *Demuestre que* $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} e^x/x^n = \infty$.

3. *Sea $p(x)$ un polinomio, es decir, $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k x^k$ con $a_n \neq 0$. Calcule*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{p(x)}.$$

Hint: Use $e^x/p(x) = (e^x/x^n)(x^n/p(x))$. Puede considerar primero el caso $a_n > 0$ y luego $a_n < 0$.

Solución. 1. Sea $M > 0$. Se tiene que existe un $m > 0$ tal que si $x \in A \cap [m, \infty)$, entonces $|1/f(x)| < 1/M$. Se sigue que $M < |f(x)|$ con lo que $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \infty$.

2. Sea $q(n) \iff \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$. Mostremos $q(1)$: Sabemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0,$$

es decir,

$$\lim_{x\to\infty} \left|\frac{e^x}{x}\right| = \infty$$

con lo que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

pues si $M > 0$ entonces existe un $m > 0$ tal que $x > m \implies |e^x/x| > M$ y se concluye que $x > m \implies e^x/x > M$ (pues $e^x > 0$ y $x > 0$ en este caso) y tenemos $q(1)$. Sea $n \in \mathbb{N}$, mostraremos $q(n)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(e^{x/n}\right)^n}{(x/n)^n n^n} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^u}{u}\right)^n \\
&= \infty
\end{aligned}$$

pues el término en paréntesis tiende a infinito por $q(1)$.

3. Se tiene que, para $x \neq 0$,

$$\frac{e^x}{p(x)} = \frac{e^x}{x^n} \frac{x^n}{p(x)}.$$

Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1/a_n$ (notemos que siempre $\operatorname{sgn}(b_n) = \operatorname{sgn}(a_n)$). Notemos que $\lim_{x\to\infty} x^n/p(x) = b_n$ y $\lim_{x\to\infty} e^x/x^n = \infty$ con lo que es de esperar que $\lim_{x\to\infty} e^x/p(x) = \operatorname{sgn}(b_n)\infty$. Nos pondremos primero en el caso $b_n > 0$: Sea $M > 0$ y sea $m_1 > 0$ tal que $x > m_1 \implies |x^n/p(x) - b_n| < b_n/2$. Se sigue que, si $x > m_1$, entonces $b_n - b_n/2 < x^n/p(x) < b_n + b_n/2$, es decir, $b_n/2 < x^n/p(x)$ cuando $x > m_1$. Sea m_2 tal que $x > m_2 \implies e^x/p(x) > 2M/b_n$. Si definimos $m = \max\{m_1, m_2\}$, entonces $x > m \implies b_n/2 < x^n/p(x)$ y $e^x/p(x) > 2M/b_n$. Se sigue que, si $x > m$, entonces

$$e^x/p(x) = \frac{e^x}{x^n} \frac{x^n}{p(x)} > \frac{e^x}{x^n} \frac{b_n}{2} > \frac{2M}{b_n} \frac{b_n}{2} = M$$

y se concluye que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{p(x)} = \infty.$$

Ahora, si $b_n < 0$, entonces $q(x) = -p(x)$ es un polinomio cuyo n-ésimo coeficiente es positivo y, por lo recién demostrado, $\lim_{x\to\infty} e^x/q(x) = \infty$, es decir, $\lim_{x\to\infty} e^x/-p(x) = \infty$ y se concluye que $\lim_{x\to\infty} e^x/p(x) = -\infty$.

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{p(x)} = \begin{cases} +\infty, & a_n > 0 \\ -\infty, & a_n < 0 \end{cases}.$$

□

Problema 3. ***[3 puntos]*** *Considere la función*

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2 e^{1/x}}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Determine $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. *Indique cuales son las asíntotas verticales y horizontales (si las tiene).*

Solución.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 e^{1/x}}{1+x^2} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{1/x}}{1/x^2+1} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} \frac{1}{1/x^2+1} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1/x^2+1} \\ &= 1\cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 e^{1/x}}{1+x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{(1/x)^2+1} \\ &= \lim_{u\to\infty} \frac{e^u}{u^2+1} \\ &= \infty \end{aligned}$$

donde se usó el problema 3 para calcular el último límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 e^{1/x}}{1+x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{(1/x)^2+1} \\ &= \lim_{u\to-\infty} \frac{e^u}{u^2+1} \\ &= \lim_{w\to\infty} \frac{e^{-w}}{w^2+1} \\ &= \lim_{w\to\infty} \frac{1}{(w^2+1)e^w} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

pues $(w^2+1)e^w \to \infty$ (además, se aplicó el teorema 13.4).
La recta $x=0$ es una asíntota vertical de f y $y=1$ es asíntota horizontal de f. $\square$

Problema 4. *1. Sea* $f(x)=x(1+e^{-1/x})$ *calcule* $\lim_{x\to 0^+}$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ *y* $\lim_{x\to 0} f(x)$.

2. $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{a}-1)$ *con* $a>0$.

Solución. 1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} x(1+e^{-1/x})\\ &= \lim_{x\to 0^-} x+xe^{-1/x}\\ &= \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{-1/x}-\frac{e^{-1/x}}{-1/x}\\ &= \lim_{u\to\infty} -\frac{1}{u}-\frac{e^u}{u}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

donde se usó el problema 2(2).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0} |x|(1+e^{-1/|x|})\\ &= \lim_{x\to 0} |x| \lim_{x\to 0}(1+e^{-1/|x|})\\ &= 0\cdot 1\\ &= 0.\end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$, entonces $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{a}-1) &= \lim_{x\to\infty} x(a^{1/x}-1)\\ &= \lim_{x\to\infty} x(e^{1/x\log(a)}-1)\\ &= \log(a)\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x\log(a)}-e^0}{1/x\log(a)-0}\\ &= \log(a)\lim_{u\to 0}\frac{e^u-e^0}{u-0}\\ &= \log(a).\end{aligned}$$

$\square$