MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.
Profesor: Yamit Yalanda.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
19 de junio de 2023

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 11

Limites en $\overline{\mathbb{R}}$

Problema 1. ***(3.0 pts)*** *Sean* $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *y considere la función* $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *definida mediante*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{bx}, & x < 0 \\ \dfrac{e^{bx} - 1}{x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Encuentre una relación entre los reales a *y* b *para que* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *exista.*

Problema 2.

1. *Sea* $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *un una función con dominio no-acotado tal que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

   Muestre que $\lim_{x\to\infty} |f|(x) = \infty$.

2. *Demuestre que* $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} e^x/x^n = \infty$.

3. *Sea* $p(x)$ *un polinomio, es decir,* $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ *con* $a_n \neq 0$. *Calcule*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{p(x)}.$$

   Hint: Use $e^x/p(x) = (e^x/x^n)(x^n/p(x))$. *Puede considerar primero el caso* $a_n > 0$ *y luego* $a_n < 0$.

Problema 3. ***[3 puntos]*** *Considere la función*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2 e^{1/x}}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

Determine $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. *Indique cuales son las asíntotas verticales y horizontales (si las tiene).*

Problema 4.

1. *Sea* $f(x) = x(1 + e^{-1/x})$ *calcule* $\lim_{x\to 0^+}$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ *y* $\lim_{x\to 0} f(x)$.

2. $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{a} - 1)$ *con* $a > 0$.