MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.
Profesor: Yamit Yalanda.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
10 de junio de 2023

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 10

Limites en $\mathbb{R}$

Problema 1. [1] *Sea f y g funciones a valores reales. Sea $a \in Dom(f \circ g)'$. Si $\lim_{x\to a} g(x) = l$, $\lim_{y\to l} f(y) = L$ y $|\{x \in Dom(g) \mid g(x) = l\}| \leq 1$, entonces*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = L.$$

Solución. Sea $a_n \to a$ una sucesión tal que $a_n \neq a$. Se sigue que $g(a_n) \to l$. Mostraremos, por contradicción, que $g(a_n) \neq l$ a partir de cierto punto: Por contradicción, asumamos que $g(a_n) = l$ para una cantidad infinita de valores de n. Sea c el único elemento que cumple $g(c) = l$, entonces $a_n = c$ para una cantidad infinita de n (pues $g(a_n) = l \implies a_n = c$) pero, como a_n converge a a, entonces $c = a$ (pues si $c \neq a$, entonces $|c-a|/2 > 0$ y existe un n_0 tal que $n \geq n_0 \implies |a_n - a| < |c-a|/2$, pero, como $a_n = c$ para infinitos n, entonces existe, para cada n_0 un $m > n_0$ tal que $a_n = c$ y se sigue que $|c-a| < |c-a|/2$. Lo que no hace sentido). Es decir, a_n toma el valor a infinitas veces, pero $a_n \neq a$, una contradicción. Es decir, hay finitos valores de n para los cuales $g(a_n) = l$. Sea M el n mas grande que cumple $g(a_n) = l$ (si este M no existe, definimos $M = -1$), con esto, la sucesión $(g(a_{n+M+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l y $g(a_{n+M+1}) \neq l$, con lo que $f(g(a_{n+M+1})) \to L$. Como $(f(g(a_{n+M+1})))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L, entonces $(f(g(a_n))) \to L$ y se concluye que $f(g(x)) \to L$ cuando $a_n \to a$. □

Problema 2. [2] *Calcule los siguientes límites:*

1. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ *donde* $x \geq 0$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$
3. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^n - ax^n}{h}$ *donde* $a, x \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
4. *Sea $p(x)$ un polinomio, es decir, $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k x^k$ para alguna sucesión real $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Calcular* $\dfrac{p(x+h) - p(x)}{h}$ *con* $x \in \mathbb{R}$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x}$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2}$.
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$.

Solución. 1.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

[1] Invención mía (definitivamente a alguien ya se le ocurrió antes si xd) es un intento de remediar la proposición 12.6 del apunte la cual es difícil de emplear con esas hipótesis (y no viene con demostración).

[2] 1. del Spivak: Chap 5, 2. aux 13 de MA1001-4 Otoño 2020, 3. y 4. invención mía, 6. y 7. aux 13 de MA1001-4 Otoño 2020 5. inspirado en este mismo aux.

2.
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1\cdot 1.$$

3. Si $n=1$, $\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)-ax}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah}{h}=\lim_{h\to 0}a=a$. Si $n>1$,
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^n-ax^n}{h}&=a\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\&=a\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}x^{n-k}h^k\right)-x^n}{h}\\&=a\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}x^{n-k}h^k\right)+x^n-x^n}{h}\\&=a\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}x^{n-k}h^k}{h}\\&=a\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1}\\&=a\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\sum_{k=2}^n\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1}\right)\\&=anx^{n-1}+a\sum_{k=2}^n\binom{n}{k}x^{n-k}\lim_{h\to 0}h^{k-1}\\&=anx^{n-1}+a\sum_{k=2}^n\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot 0\\&=anx^{n-1}\end{aligned}$$

4. Si $n=1$, $\lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h}=\lim\frac{a_0+a_1(x+h)-a_0-a_1x}{h}=a_1$. Si $n>1$,
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{a_0+\sum_{k=1}^n a_k(x+h)^k-a_0-\sum_{k=1}^n a_kx^k}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=1}^n a_k(x+h)^k-a_kx^k}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^n\frac{a_k(x+h)^k-a_kx^k}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{a_1(x+h)-a_1x}{h}+\sum_{k=2}^n\frac{a_k(x+h)^k-a_kx^k}{h}\right)\\&=a_1+\sum_{k=2}^n\lim_{h\to 0}\frac{a_k(x+h)^k-a_kx^k}{h}\\&=a_1+\sum_{k=2}^n a_kkx^{k-1}\end{aligned}$$

5. Recordemos que, para $x\in(0,\infty)$,
$$1-\frac{1}{x}\le\log(x)\le x-1$$
es decir, para $x>-1$,
$$1-\frac{1}{1+x}\le\log(1+x)\le x$$

con lo que, dividiendo por x para $x > 0$ se tiene que

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+x^2} \leq \log(1+x)/x \leq 1$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{1+x} \leq \log(1+x)/x \leq 1$$

y, ahora dividiendo para $x < 0$ en lugar de $x > 0$, se obtiene

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+x^2} \geq \log(1+x)/x \geq 1$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{1+x} \geq \log(1+x)/x \geq 1$$

con lo que siempre se cumple, para $x > -1$ que

$$\text{mín}\left(\frac{1}{1+x}, 1\right) \leq \log(1+x)/x \leq \text{máx}\left(\frac{1}{1+x}, 1\right)$$

con lo que, por sándwich,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

6.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\sqrt{1-\sin^2(x)}\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\frac{\log(1-\sin^2(x))}{-\sin^2(x)}\frac{\sin^2(x)}{x^2} \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-\sin^2(x))}{-\sin^2(x)}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2
\end{aligned}$$

Definiendo $f(x) = \log(1+x)/x$ y $g\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ mediante $x \mapsto g(x) = -\sin^2(x)$ (la cual cumple $|\{x \in \mathrm{Dom}(g) \mid g(x) = 0\}| \leq 1$), podemos usar el problema 1 notando que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ y $\lim_{y\to 0} f(x) = 1$ para concluir que $\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 1$ con lo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

7.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\dfrac{1}{\sin^2(x)}} &= \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{\sin^2(x)} \log(\cos(x))\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\log(\cos(x))}{\sin^2(x)}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{\sin^2(x)}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} \frac{x^2}{\sin^2(x)}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} \left(\frac{1}{\frac{\sin(x)}{x}}\right)^2\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot 1\right) \\
&= e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

□

Problema 3. [3] *Sea*

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x \mapsto f(x) &= \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Encuentre todos los puntos $a \in \mathbb{R}$ donde $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Solución. Mostraremos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$: Sea a_n una sucesión nula que, entonces

$$\min\{0, x_n\} \leq f(x_n) \leq \max\{0, x_n\}$$

con lo que, por el teorema del sándwich, $f(x_n) \to 0$. Como esto es verdad para cualquier $x_n \to 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Mostremos ahora que si $a \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. Sea x_n una sucesión de irracionales tal que $x_n \to a$. Entonces $f(x_n) = 0$ con lo que $f(x_n) \to 0$. Sea, ahora, y_n una sucesión de racionales tal que $y_n \to a$ (existe pues los racionales son densos y por ende existe, para cada n, un racional $y_n \in (a - 1/n, a + 1/n)$, es decir, $|y_n - a| < 1/n$ con lo que $y_n \to a$). Se sigue que $f(y_n) = y_n$ con lo que $f(y_n) \to a \neq 0$. Con lo que hay dos sucesiones x_n, y_n convergiendo a a tal que $f(x_n)$ y $f(y_n)$ convergen a distintos valores. Se sigue que $f(x)$ no converge cuando $x \to a \neq 0$.

Se concluye que $a = 0$ es el único valor de a que cumple $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. □

Problema 4. [4]

1. *Muestre que si $\lim_{x\to 0} f(x)/x = l$ con $b \neq 0$, entonces $\lim_{x\to 0} f(bx)/x = bl$.*
2. *Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ con $a, b \neq 0$.*

Solución. 1.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(bx)}{x} &= b \lim_{x\to 0} \frac{f(bx)}{bx} \\
&= bl.
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad queda justificada mediante el siguiente argumento: Sea $g(x) = f(x)/x$ y $h(x) = bx$, entonces $f(bx)/bx = g(h(x))$ donde h es inyectiva y se utiliza el problema 1.

[3] Inspirado inconscientemente por Spivak, Calculus: Chapter 5, Limits. Problem 20).

[4] Spivak, Calculus, Chap. 5 Limits, Problem 14.

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} \frac{x}{\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} \frac{1}{\frac{\sin(bx)}{x}} = \frac{a}{b}$$

$\square$