

MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.

Profesor: Yamit Yalanda.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira

12 de junio de 2023



AUXILIAR 10

Limites en $\mathbb{R}$

Problema 1. ¹ Sea f y g funciones a valores reales. Sea $a \in \text{Dom}(f \circ g)'$. Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$, $\lim_{y \rightarrow l} f(y) = L$ y $|\{x \in \text{Dom}(g) \mid g(x) = l\}| \leq 1$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = L.$$

Problema 2. ² Calcule los siguientes límites:

1. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ donde $x \geq 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$

3. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^n - ax^n}{h}$ donde $a, x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

4. Sea $p(x)$ un polinomio, es decir, $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k x^k$ para alguna sucesión real $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Calcular $\frac{p(x+h) - p(x)}{h}$ con $x \in \mathbb{R}$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x}$.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2}$.

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$.

Problema 3. ³ Sea

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Encuentre todos los puntos $a \in \mathbb{R}$ donde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Problema 4. ⁴

1. Muestre que si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = l$ con $b \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(bx)/x = bl$.

2. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ con $a, b \neq 0$.

¹Invencción mía (definitivamente a alguien ya se le ocurrió antes si xd) es un intento de remediar la proposición 12.6 del apunte la cual es difícil de emplear con esas hipótesis (y no viene con demostración).

²1. del Spivak: Chap 5, 2. aux 13 de MA1001-4 Otoño 2020, 3. y 4. invención mía, 6. y 7. aux 13 de MA1001-4 Otoño 2020 5. inspirado en este mismo aux.

³Inspirado inconscientemente por Spivak, Calculus: Chapter 5, Limits. Problem 20).

⁴Spivak, Calculus, Chap. 5 Limits, Problem 14.