

MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.

Profesor: Yamit Yalanda.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira

5 de junio de 2023



AUXILIAR 9

exponencial

Problema 1 (Propuesto). *Muestre la siguiente propiedad:*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (ac > 0 \wedge a < b < c \implies \min(|a|, |c|) < |b|).$$

Problema 2. a) *Demuestre que $u_n = \frac{n^n}{n!e^n}$ converge.*

b) *Calcule explícitamente:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(n^2 \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right) - 1 \right)$$

c) *Calcule*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^i.$$

Solución. a)

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!e^{n+1}} \frac{n!e^n}{n^n} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n!(n+1)e^n e} \frac{n!e^n}{n^n} \\ &= \frac{(n+1)^n}{e} \frac{1}{n^n} \\ &= e^{-1} \left(\frac{(n+1)}{n} \right)^n \\ &= e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\ &\leq e^{-1} \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= e^{-1} e \\ &= 1. \end{aligned}$$

Se sigue para cualquier n , $u_{n+1} \leq u_n$ y $(u)_n$ es una sucesión decreciente. Como, además, todos los valores de la sucesión son positivos, se concluye que (u_n) es acotada inferiormente y decreciente por lo que converge.

b) Se tiene que (notando que $n^{-2} < 1$ para $n \geq 2$), si $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
1 + n^{-2} &\leq e^{n^{-2}} \leq \frac{1}{1 - n^{-2}} \\
\implies n^{-2} &\leq e^{n^{-2}} - 1 \leq \frac{1}{1 - n^{-2}} - 1 \\
\implies 1 &\leq n^2(e^{n^{-2}} - 1) \leq n^2 \left(\frac{1}{1 - n^{-2}} - 1 \right) \\
\implies 0 &\leq n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1 \leq n^2 \left(\frac{1}{1 - n^{-2}} - 1 \right) - 1 \\
\implies 0 &\leq n(n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1) \leq n \left(n^2 \left(\frac{1}{1 - n^{-2}} - 1 \right) - 1 \right) \\
\implies 0 &\leq n(n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1) \leq n \left(n^2 \left(\frac{n^{-2}}{1 - n^{-2}} \right) - 1 \right) \\
\implies 0 &\leq n(n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1) \leq n \left(\frac{1}{1 - n^{-2}} - 1 \right) \\
\implies 0 &\leq n(n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1) \leq n \left(\frac{n^{-2}}{1 - n^{-2}} \right) \\
\implies 0 &\leq n(n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1) \leq \frac{n^{-1}}{1 - n^{-2}} \\
\implies 0 &\leq n(n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1) \leq \frac{1/n}{1 - 1/n^2}
\end{aligned}$$

y, por teorema del sándwich, $n(n^2(e^{n^{-2}} - 1) - 1)$ es nula.

c) Se tiene que, para cualquier real r ,

$$\sum_{i=1}^n r^i = \frac{r(r^n - 1)}{r - 1}$$

pues es la suma geométrica. De esto se sigue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e^{\frac{1}{n}})^i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}(e - 1)}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}(e - 1)}{\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}(e - 1)}{\frac{e^{\frac{1}{n}} - e^0}{\frac{1}{n} - 0}} \\
&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}}(e - 1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^0}{\frac{1}{n} - 0}} \\
&= \frac{(e - 1)}{e^0} \\
&= e - 1.
\end{aligned}$$

□

Problema 3. Calcule los siguientes límites.

a) (1,3 pts.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{2e^n - e^{-n}}$.

b) (1 pts.) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + e^n)^{1/n}$

c) (1 pts.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \exp\left(\frac{n^2 + 2}{2n^2}\right) + n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\}$

Solución. a)

$$\begin{aligned} \frac{e^n}{2e^n - e^{-n}} &= \frac{1}{2 - e^{-n}/e^n} \\ &= \frac{1}{2 - e^{-2n}} \\ &= \frac{1}{2 - (1/e^2)^n} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donde se usó que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n = 0$ pues $|\frac{1}{e^2}| < 1$.

b) Se tiene que

$$e = (e^n)^{1/n} \leq (1 + e^n)^{1/n} \leq (e^n + e^n)^{1/n} = 2^{1/n}e$$

con lo que $e \leq (1 + e^n)^{1/n} \leq \sqrt[n]{2}e$ y por el teorema del sándwich, $(1 + e^n)^{1/n} \rightarrow e$.

c) Se tiene que

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{n^2 + 2}{2n^2}\right) + n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \exp\left(\frac{1 + 2/n^2}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &\rightarrow \exp(1/2) + \log(e) \\ &= e^{1/2} + 1 \\ &= \sqrt{e} + 1. \end{aligned}$$

□

Problema 4. El objetivo del siguiente problema es encontrar, para cada $x > 0$ una sucesión que converja a $\log(x)$ (al igual que se hizo con la función exponencial). Sea $x > 0$, muestre que

$$\log(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(x^{1/n} - 1)$$

Con lo que pudimos haber definido primero \log y luego definir \exp como su inversa.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} n(x^{1/n} - 1) &= \frac{x^{1/n} - x^0}{1/n} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{n} \log(x)} - e^0}{\frac{1}{n} \log(x) - 0} \log(x) \\ &\rightarrow e^0 \log(x) \\ &= \log(x). \end{aligned}$$

□

Problema 5. a) Sea (x_n) una sucesión y sea (y_n) convergente a $y \neq 0$. Muestre que si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = l,$$

entonces x_n converge a l/y .

b) Sea (a_n) convergente a $L > 0$. Se define

$$s_n = \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$$

demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{\left(1 + \frac{L}{n}\right)^n} = 1.$$

c) Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

si es que existe.

Solución. a) Mostremos primero que x_n es acotada: por contradicción, sea x_n no-acotada. Como $y_n \rightarrow y \neq 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies |y_n - y| < |y|/2$, es decir, $y - |y|/2 < y_n < y + |y|/2$ y se sigue que, para $n > n_0$,

$$\min(|y - |y|/2|, |y + |y|/2|) < |y_n|$$

(donde se usó que $ac > 0 \wedge a < b < c \implies \min(|a|, |c|) < |b|$) y se sigue que, para $n > n_0$,

$$|x_n| \min(|y - |y|/2|, |y + |y|/2|) \leq |x_n y_n|$$

con lo que, si denotamos $c = \min(|y - |y|/2|, |y + |y|/2|)$ (notemos que $c > 0$) y se tiene que, para $n > n_0$,

$$|x_n|c < |x_n y_n|$$

con lo que $|x_n y_n|$ no puede ser acotada, una contradicción (pues $(x_n y_n)$ es convergente). Es decir, x_n es acotada y denotamos $\alpha = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} |x_n - l/y| &= \frac{|x_n y - l|}{|y|} \\ &= \frac{|x_n y_n - x_n y_n + x_n y - l|}{|y|} \\ &\leq \frac{|x_n y_n - l| + |x_n y - x_n y_n|}{|y|} \\ &\leq \frac{|x_n y_n - l| + |y - y_n| |x_n|}{|y|} \\ &\leq \frac{|x_n y_n - l| + |y - y_n| \alpha}{|y|} \\ &= |x_n y_n - l| \frac{1}{|y|} + |y - y_n| \frac{\alpha}{|y|} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

con lo que $x_n \rightarrow l/y$ y se concluye.

b) Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{s_n}{\left(1 + \frac{L}{n}\right)^n} &= \left(\frac{1 + \frac{a_n}{n}}{1 + \frac{L}{n}}\right)^n \\ &= \left(\frac{n + a_n}{n + L}\right)^n \\ &= \left(1 + \left[\frac{n + a_n}{n + L} - 1\right]\right)^n \\ &= \left(1 + \left[\frac{a_n - L}{n + L}\right]\right)^n \\ &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

donde el último paso se argumenta mediante el hecho que $\frac{a_n - L}{n + L} \rightarrow 0$ y $n \frac{a_n - L}{n + L} \rightarrow 0$ (proposición 10.3 del apunte).

c) Notemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{L}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^L} = e^{-L} \neq 0.$$

y, además, por la parte anterior,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{\left(1 + \frac{L}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \frac{1}{\left(1 + \frac{L}{n}\right)^n} = 1$$

con lo que, por la parte a), se sigue que s_n converge y lo hace a $1/e^{-L}$, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e^L.$$

□