

MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.

Profesor: Yamit Yalanda.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira

29 de mayo de 2023



AUXILIAR 8

Sucesiones

Problema 1. Considere la sucesión (s_n) definida recursivamente por

$$\left. \begin{aligned} s_{n+1} &= \frac{3}{2} - \frac{1}{4s_n + 6} \\ s_0 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- I) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n > 0$.
- II) Demuestre que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente.
- III) Demuestre que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y calcule su límite.

Solución. I) Por inducción, $s_0 = 1 > 0$. Asumamos $s_n > 0$, entonces

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \frac{3}{2} - \frac{1}{4s_n + 6} \\ &= \frac{12s_n + 18 - 2}{8s_n + 12} \\ &= \frac{3s_n + 4}{2s_n + 3} \end{aligned}$$

con lo que, como $s_n > 0$, $3s_n + 4 > 0$ y $2s_n + 3 > 0$ con lo que $s_{n+1} > 0$. Se concluye que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n > 0$.

II) Definimos $p(n)$ como $s_n \leq s_{n+1}$ y queremos mostrar $\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$. Para $n = 0$,

$$s_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4 \cdot 1 + 6} = \frac{15}{10} - \frac{1}{10} = \frac{14}{10} \geq 1 = s_0$$

por lo que $p(0)$. Sea $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\begin{aligned} p(n) &\implies s_n \leq s_{n+1} \\ &\implies 4s_n + 6 \leq 4s_{n+1} + 6 \\ &\implies \frac{1}{4s_n + 6} \geq \frac{1}{4s_{n+1} + 6} \\ &\implies \frac{3}{2} - \frac{1}{4s_n + 6} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{4s_{n+1} + 6} \\ &\implies s_{n+1} \leq s_{n+2} \\ &\implies p(n+1) \end{aligned}$$

$$\therefore p(0) \wedge [\forall n \in \mathbb{N}, p(n) \implies p(n+1)].$$

y se concluye que $\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$ con lo que (s_n) es creciente.

III) Mostraremos que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Definimos $p(n)$ como $s_n \leq \frac{3}{2}$. Se tiene $p(0)$ pues $s_0 = 1 \leq \frac{3}{2}$. Sea $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} p(n) &\implies s_n \leq \frac{3}{2} \\ &\implies 4s_n + 6 \leq 12 \\ &\implies \frac{3}{2} - \frac{1}{4s_n + 6} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{12} \\ &\implies s_{n+1} \leq \frac{3}{2} \\ &\implies p(n+1) \end{aligned}$$

con lo que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ y $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada superiormente por $\frac{3}{2}$ y, como (s_n) es creciente, se sigue que converge. Sea $s = \lim s_n$. Se sigue que

$$\begin{aligned} s &= \lim s_{n+1} \\ &= \lim \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4s_n + 6} \right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{4 \lim s_n + 6} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{4s + 6} \end{aligned}$$

$$\therefore s = \frac{3}{2} - \frac{1}{4s + 6}$$

y se sigue que

$$\begin{aligned} s = \frac{3}{2} - \frac{1}{4s + 6} &\iff s = \frac{3s + 4}{2s + 3} \\ &\iff 2s^2 + 3s = 3s + 4 \\ &\iff s^2 = 2 \\ &\iff s = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

pero $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n > 0$ con lo que $s \geq 0$ y se concluye que $s = \sqrt{2}$.

La siguiente tabla muestra valores de s_n^2 para ver como se comporta la sucesión (no es parte de la solución, su presentación es con fines didácticos).

n	s_n^2
0	1
1	1,9599999999999997
2	1,998810939357907
3	1,999964987220335
4	1,999989693112423
5	1,999999696593485
6	1,999999991068544
7	1,999999999737081
8	1,99999999999226
9	1,999999999999771
10	1,999999999999996

Cuadro 1: Los valores de s_n^2 para $n \in \{0, 1, \dots, 10\}$ generados por un script de Python (valores aproximados).

□

Problema 2. Sea $F \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto tal que, para toda sucesión convergente (x_n) con $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$, se tiene que $\lim x_n \in F$. Muestre que para todo $y \notin F$, se tiene que $d(y, F) := \inf\{|y - x| : x \in F\} > 0$.

Hint: Use contradicción y construya una sucesión (x_n) con valores en F tal que $x_n \rightarrow y$ (recuerde las propiedades del ínfimo).

Solución. Sea $y \notin F$. Se tiene que $d(y, F) \geq 0$ pues $|y - x| \geq 0$ para todo $x \in F$. Por contradicción, asumamos que $d(y, F) = 0$. Construiremos una sucesión (x_n) con valores en F tal que $|y - x_n| \rightarrow 0$. Los definiremos uno a la vez: Sea $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $1/(n+1) > 0$ con lo que existe un $x \in F$ tal que $|y - x| < 1/(n+1)$ (pues 0 es el ínfimo de $\{|y - x| : x \in F\}$). Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n un elemento de F que cumple $|y - x_n| < 1/(n+1)$ (sabemos que este elemento existe para cada n por lo recién mencionado). Se sigue que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |y - x_n| < 1/(n+1)$ con lo que, por el teorema de sándwich, $|y - x_n| \rightarrow 0$. Es decir, $x_n \rightarrow y$. Pero toda sucesión convergente con valores en F , converge a un valor en F (por definición de F), con lo que $y \in F$, una contradicción. Es decir, $d(y, F) > 0$. $\square$

Problema 3. Sea $u_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$. Calcule $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$.

Hint: Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se tiene que $|\{i \in \mathbb{N} \mid i \in \{1, 2, \dots, n\} \wedge i \text{ es par}\}| = \frac{n - (1 + (-1)^{n+1})/2}{2}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (1 + (-1)^i) \\
 &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n 1 + (-1)^i \\
 &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ es par}}}^n 1 + (-1)^i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ es impar}}}^n 1 + (-1)^i \right) \\
 &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ es par}}}^n [1 + 1] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ es impar}}}^n [1 - 1] \right) \\
 &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ es par}}}^n 2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ es impar}}}^n 0 \right) \\
 &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ es par}}}^n 2 \right) \\
 &= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ es par}}}^n 1 \right) \\
 &= \frac{1}{n} \frac{n - (1 + (-1)^{n+1})/2}{2} \\
 &= \frac{1}{n} \frac{n - u_{n+1}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{u_{n+1}}{n}
 \end{aligned}$$

Con lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{u_{n+1}}{n} = \frac{1}{2}$$

$\square$

Problema 4. Sea, para $n \geq 1$,

$$t_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}.$$

Pruebe que (t_n) converge.

Solución. Consideremos t_{n+1}/t_n :

$$\begin{aligned} \frac{t_{n+1}}{t_n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Se sigue que $t_{n+1} \leq t_n$.

Como $t_n > 0$ para cada n , se sigue que (t_n) es decreciente y acotada inferiormente y se concluye que t_n converge. $\square$

Problema 5. Calcule, si es que existen, los siguiente límites:

a) $\lim \sqrt[n]{13n} - \frac{n^{10} \cos(n!)}{(1,1)^n}$

b) $\lim \left(\frac{2n-1}{3n+5} \right)^n$

c) $\lim \left(\frac{n+2}{2n} \right)^{2n}$

d) $\lim \sqrt[n]{\frac{2n+1}{2n+1 + \frac{5^n}{(n-1)!}}}$

e) $\lim \left(\frac{(n^2+2n+2)n}{(n^2+2)(n+2)} \right)^n$

Solución. a)

$$\sqrt[n]{13n} - \frac{n^{10} \cos(n!)}{(1,1)^n} = \underbrace{\sqrt[n]{13} \sqrt[n]{n}}_{\text{Nula}} - n^{10} \underbrace{\left(\frac{10}{11} \right)^n}_{\text{Acotada}} \underbrace{\cos(n!)}_{\text{Acotada}} \rightarrow 1 \cdot 1 - 0 = 1$$

b)

$$\left(\frac{2n-1}{3n+5} \right)^n = \left(\frac{2-1/n}{3+5/n} \right)^n \rightarrow 0$$

pues $\frac{2-1/n}{3+5/n} \rightarrow \frac{2}{3} \in (-1, 1)$.

c)

$$\left(\frac{n+2}{2n} \right)^{2n} = \underbrace{\left(\frac{1+2/n}{2} \right)^n}_{\text{Nula}} \underbrace{\left(\frac{1+2/n}{2} \right)^n}_{\text{Nula}} \rightarrow 0$$

pues $\frac{1+2/n}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \in (-1, 1)$.

d)

$$\sqrt[n]{\frac{2n+1}{2n+1 + \frac{5^n}{(n-1)!}}} = \sqrt[n]{\frac{2+1/n}{2+1/n + \frac{5^n}{n!}}} \rightarrow 1$$

Pues $\frac{2+1/n}{2+1/n + \frac{5^n}{n!}} \rightarrow 1 > 0$ (pues $\frac{5^n}{n!} \rightarrow 0$).

e)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{(n^2 + 2n + 2)n}{(n^2 + 2)(n + 2)} \right)^n &= \left(\frac{n(n^2 + 2) + 2n^2}{(n^2 + 2)(n + 2)} \right)^n \\
&= \left(\frac{n(n^2 + 2) + 2n^2 + 4 - 4}{(n^2 + 2)(n + 2)} \right)^n \\
&= \left(\frac{n(n^2 + 2) + 2(n^2 + 2) - 4}{(n^2 + 2)(n + 2)} \right)^n \\
&= \left(\frac{(n^2 + 2)(n + 2) - 4}{(n^2 + 2)(n + 2)} \right)^n \\
&= \left(1 - \frac{4}{(n^2 + 2)(n + 2)} \right)^n \\
&\rightarrow 1
\end{aligned}$$

pues $\frac{4}{(n^2+2)(n+2)} \rightarrow 0$ y $n \frac{4}{(n^2+2)(n+2)} = \frac{4/n^2}{(1+2/n^2)(1+2/n)} \rightarrow 0$ (Proposición 10.3).

□