

MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.

Profesor: Yamit Yalanda.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira

29 de mayo de 2023



# AUXILIAR 8

## Sucesiones

**Problema 1.** Considere la sucesión  $(s_n)$  definida recursivamente por

$$\left. \begin{aligned} s_{n+1} &= \frac{3}{2} - \frac{1}{4s_n + 6} \\ s_0 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- I) Demuestre que  $\forall n \in \mathbb{N}, s_n > 0$ .
- II) Demuestre que  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente.
- III) Demuestre que  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge y calcule su límite.

**Problema 2.** Sea  $F \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto tal que, para toda sucesión convergente  $(x_n)$  con  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in F$ , se tiene que  $\lim x_n \in F$ . Muestre que para todo  $y \notin F$ , se tiene que  $d(y, F) := \inf\{|y - x| : x \in F\} > 0$ .

**Hint:** Use contradicción y construya una sucesión  $(x_n)$  con valores en  $F$  tal que  $x_n \rightarrow y$  (recuerde las propiedades del ínfimo).

**Problema 3.** Sea  $u_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$ . Calcule  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$ .

**Hint:** Para cada  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , se tiene que  $|\{i \in \mathbb{N} \mid i \in \{1, 2, \dots, n\} \wedge i \text{ es par}\}| = \frac{n - (1 + (-1)^{n+1})/2}{2}$ .

**Problema 4.** Sea, para  $n \geq 1$ ,

$$t_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}.$$

Pruebe que  $(t_n)$  converge.

**Problema 5.** Calcule, si es que existen, los siguientes límites:

a)  $\lim \sqrt[n]{13n} - \frac{n^{10} \cos(n!)}{(1,1)^n}$

b)  $\lim \left( \frac{2n-1}{3n+5} \right)^n$

c)  $\lim \left( \frac{n+2}{2n} \right)^{2n}$

d)  $\lim \sqrt[n]{\frac{2n+1}{2n+1 + \frac{5^n}{(n-1)!}}}$

e)  $\lim \left( \frac{(n^2+2n+2)n}{(n^2+2)(n+2)} \right)^n$

## Apéndice.

### Problema 1.

| $n$ | $s_n^2$            |
|-----|--------------------|
| 0   | 1                  |
| 1   | 1,9599999999999997 |
| 2   | 1,998810939357907  |
| 3   | 1,999964987220335  |
| 4   | 1,999989693112423  |
| 5   | 1,999999696593485  |
| 6   | 1,999999991068544  |
| 7   | 1,999999999737081  |
| 8   | 1,99999999999226   |
| 9   | 1,999999999999771  |
| 10  | 1,999999999999996  |

Cuadro 1: Los valores de  $s_n^2$  para  $n \in \{0, 1, \dots, 10\}$  generados por un script de Python (valores aproximados).