MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.
Profesor: Yamit Yalanda.
Auxiliar: Sebastián P. Pincheira
22 de mayo de 2023

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 7

Sucesiones

Problema 1. *(a). Demuestre la continuidad del valor absoluto. Es decir, para cualquier sucesión convergente (a_n), $(|a_n|)$ converge y $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.*

(b). Demuestre la continuidad de la raíz cuadrada. Es decir, para cualquier sucesión no negativa convergente (a_n), $(\sqrt{a_n})$ converge y $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim a_n}$.

Solución. (a). Sea $l = \lim a_n$. Queremos mostrar que $\lim |a_n| = |l|$. Sea $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|a_n - l| < \varepsilon$. Se tiene que, si $n \geq n_0$, entonces $||a_n| - |l|| \leq |a_n - l| < \varepsilon$ y se concluye que $|a_n| \to |l|$.

(b). Sea $l = \lim a_n$. Queremos mostrar que $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{l}$. Si $l \neq 0$, se tiene que $|\sqrt{a_n} - \sqrt{l}| = |(\sqrt{a_n} - \sqrt{l})(\sqrt{a_n} + \sqrt{l})/(\sqrt{a_n} + \sqrt{l})| \leq |a_n - l|/\sqrt{l}$. como $a_n - l \to 0$, se sigue que $|\sqrt{a_n} - \sqrt{l}| \to 0$ con lo que $\sqrt{a_n} \to \sqrt{l}$. Ahora, si $l = 0$, sea $\varepsilon > 0$ y n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces $|a_n| < \varepsilon^2$ (recordemos que $a_n \geq 0$), entonces $\sqrt{a_n} < \varepsilon$. Se sigue que $|\sqrt{a_n} - \sqrt{l}| = \sqrt{a_n} < \varepsilon$ y se concluye que $\sqrt{a_n} \to l$.

$\square$

Problema 2. *(a).* [1] *(**2 pts.**) Sea $s_n = 3 + \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$. Sea $\varepsilon > 0$. Muestre que existe un n_0 para el que se cumpla que si $n \geq n_0$ entonces*

$$|s_n - 3| < \varepsilon.$$

(b). [2] *($\geq$ **2 pts.**) Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones tal que $a_n \to l$ y $b_n \to r$. Demuestre que $\max\{a_n, b_n\} \to \max\{l, r\}$.*

(c). [3] *Calcule*

1). $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n^n n!}{\sqrt{n+1}}\right)$

2). $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)n$

3). $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n^4 + 2n^2}{n^4 + 5n^3 + 3n + 6}$

4). $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}}\cos\left(\frac{n^n}{n!}\right) + \frac{2n+1}{3-3n}}{\frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{1-\frac{n!}{n^n}}}$

5). $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + n}{na_n^2 + 1}$ *donde $a_n \to l$.*

[1] MA1001-4 (Otoño 2020). *Control* 3, P1 (b).
[2] MA1001-4 (Otoño 2020), *Auxiliar* #10. P1. Este problema salió en el control del mismo semestre con $(a_n) = (1)$ y $r = 1$ (MA1001-4 (Otoño 2020). *Control* 3, P1 (c).).
[3] MA1001-4 (Otoño 2020), *Auxiliar* #10. P3.

Solución. (a). Se quiere $|s_n - 3| < \varepsilon$, es decir $\sqrt{n}/(2n+3) < \varepsilon$. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n}}{2n+3} &\leq \frac{\sqrt{n}}{2n} \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

con lo que basta que $\sqrt{1/n} < \varepsilon$ para que $|s_n - 3| < \varepsilon$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq n_0$, $1/n < \varepsilon^2$, este n_0 existe pues $1/n \to 0$. Se sigue que, si $n \geq n_0$, entonces $1/n < \varepsilon^2$, entonces $\sqrt{1/n} < \varepsilon$, entonces $|s_n - 3| < \varepsilon$.

(b). Se tiene que para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

Con lo que se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n + |a_n - b_n|}{2} \\ &= \frac{\lim a_n + b_n + |a_n - b_n|}{\lim 2} \\ &= \frac{\lim a_n + \lim b_n + \lim |a_n - b_n|}{2} \\ &= \frac{l + r + |\lim a_n - b_n|}{2} \\ &= \frac{l + r + |l - r|}{2} \\ &= \max\{l, r\}.\end{aligned}$$

(c). 1). El primer termino es nulo y el segundo es acotado. Se sigue que $\frac{1}{n} \sin\left(\frac{n^n n!}{\sqrt{n+1}}\right) \to 0$.

2). Se tiene que

$$\begin{aligned}(\sqrt{n^2+1} - n)n &= \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{(\sqrt{n^2+1} + n)} n \\ &= \frac{n^2 + 1 - n^2}{(\sqrt{n^2+1} + n)} n \\ &= \frac{n}{(\sqrt{n^2+1} + n)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{1 + 1/n^2} + 1)}.\end{aligned}$$

Se concluye que $\lim(\sqrt{n^2+1} - n)n = 1/2$ (pues $1 + \frac{1}{n^2} \to 1$) y P1 (b).

3).

$$\frac{4n^4 + 2n^2}{n^4 + 5n^3 + 3n + 6} = \frac{4 + 2/n^2}{1 + 5/n + 3/n^3 + 6/n^4} \to 4$$

4). En el numerador, el primer término es nulo, el segundo es nulo por acotado, el tercero es igual a $(2 + 1/n)/(-3 + 3/n)$ por lo que converge a $-2/3$. Es decir, el numerador converge a $-2/3$. En el denominador, el segundo termino es nulo por acotado, el primero es nulo (última propiedad de la semana en el apunte) y, como $n!/n^n \to 0$ (penúltima propiedad de la semana en el apunte), se sigue que el último término converge a 1. Como el numerado converge a $-2/3$ y el denominador converge a 1, se concluye que $\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{\sqrt{n}}\cos\left(\frac{n^n}{n!}\right)+\frac{2n+1}{3-3n}}{\frac{2^n}{n!}+\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{1-\frac{n!}{n^n}}} \to -2/3$.

5). Se tiene que

$$\frac{a_n+n}{na_n^2+1} = \frac{a_n/n+1}{a_na_n+1/n} \to \frac{1}{l^2}$$

donde se usó que a_n es acotada en el numerador, y que es convergente en el denominador.

□

Problema 3. *(a).* [4] ***(2 pts.)*** *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones reales tales que $a_n \leq a$, $b_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $a_n + b_n \to a + b$. Demuestre que $a_n \to a$ y $b_n \to b$.*

(b). [5] *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio de grado $k \in \mathbb{N}$. Calcule $\lim p(n)\frac{a^n}{n^n}$.*

(c). Sea (b_n) acotada y (a_n) tal que $(1/a_n)$ es nula. Muestre que $\frac{1}{a_n+b_n} \to 0$.

Solución. (a). Como $a_n \leq a$ y $b_n \leq b$, sumando b_n a la primera y a_n a la segunda se obtienen las desigualdades

$$a_n + b_n \leq a + b_n$$

$$a_n + b_n \leq b + a_n$$

y se sigue que

$$a_n + b_n - a \leq b_n$$
$$a_n + b_n - b \leq a_n$$

y usando la desigualdad del enunciado, se tiene que

$$a_n + b_n - a \leq b_n \leq b$$

$$a_n + b_n - b \leq a_n \leq a.$$

Con esto se tienen las siguientes desigualdades:

$$a_n + b_n - (a + b) \leq b_n - b \leq 0$$

$$a_n + b_n - (a + b) \leq a_n - a \leq 0$$

con lo que, multiplicando todo por -1, se llega a

$$0 \leq |b - b_n| \leq |a + b - (a_n + b_n)| \tag{1}$$

$$0 \leq |a - a_n| \leq |a + b - (a_n + b_n)|. \tag{2}$$

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|a + b - (a_n + b_n)| < \varepsilon$. Entonces para cada $n \geq n_0$, se tiene que $|b - b_n| < \varepsilon$ y $|a - a_n| < \varepsilon$ (por desigualdades (1) y (2)). Con lo que se concluye que $a_n \to a$ y $b_n \to b$.

[4] MA1001 (Primavera 2022), Control 3, P1 b).
[5] Apunte del Curso (MA1001), semana 9, problema P2.

(b). Se tiene que $p(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$ con lo que

$$\begin{aligned}
\lim p(n) \frac{a^n}{n^n} &= \lim \left(\sum_{i=0}^{k} b_i n^i \right) \frac{a^n}{n^n} \\
&= \lim \sum_{i=0}^{k} b_i n^i \frac{a^n}{n^n} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \lim b_i n^i \frac{a^n}{n^n} \\
&= \sum_{i=0}^{k} b_i a^i \lim \frac{a^{n-i}}{n^{n-i}} \\
&= \sum_{i=0}^{k} b_i a^i 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

donde se utilizó que $a^n/n^n \to 0$. En efecto, si $\varepsilon > 0$ y N es tal que si $n \geq N$, entonces $a/n < \varepsilon$. Podemos definir $n_0 = \max\{a, N\}$ y se tiene que, si $n \geq n_0$, entonces $a^n/n^n = (a/n)^n \leq a/n < \varepsilon$.

(c). Sea $M > 0$ tal que $|b_n| \leq M$ para todo n. Sea $\varepsilon > 0$ y sea n_0 tal que para $n \geq n_0$, se tiene que $1/|a_n| < 1/(1/\varepsilon + M)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + M} \\
&\implies |a_n| > \frac{1}{\varepsilon} + M \\
&\implies |a_n| - M > \frac{1}{\varepsilon} \\
&\implies |a_n| - |b_n| > \frac{1}{\varepsilon} \\
&\implies |a_n| - |-b_n| > \frac{1}{\varepsilon} \\
&\implies |a_n - -b_n| > \frac{1}{\varepsilon} \\
&\implies |a_n + b_n| > \frac{1}{\varepsilon} \\
&\implies \frac{1}{|a_n + b_n|} < \varepsilon
\end{aligned}$$

con lo que $\frac{1}{a_n + b_n} \to 0$.

$\square$