

MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.

Profesor: Yamit Yalanda.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira

22 de mayo de 2023



AUXILIAR 7

Sucesiones

Problema 1. (a). Demuestre la continuidad del valor absoluto. Es decir, para cualquier sucesión convergente (a_n) , $(|a_n|)$ converge y $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.

(b). Demuestre la continuidad de la raíz cuadrada. Es decir, para cualquier sucesión no negativa convergente (a_n) , $(\sqrt{a_n})$ converge y $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim a_n}$.

Problema 2. (a). ¹ (2 pts.) Sea $s_n = 3 + \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$. Sea $\varepsilon > 0$. Muestre que existe un n_0 para el que se cumpla que si $n \geq n_0$ entonces

$$|s_n - 3| < \varepsilon.$$

(b). ² (≥ 2 pts.) Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones tal que $a_n \rightarrow l$ y $b_n \rightarrow r$. Demuestre que $\max\{a_n, b_n\} \rightarrow \max\{l, r\}$.

(c). ³ Calcule

1). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \left(\frac{n^n n!}{\sqrt{n+1}} \right)$

2). $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n)n$

3). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 + 2n^2}{n^4 + 5n^3 + 3n + 6}$

4). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}} \cos \left(\frac{n^n}{n!} \right) + \frac{2n+1}{3-3n}}{\frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{1-\frac{n!}{n^n}}}$

5). $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + n}{na_n^2 + 1}$ donde $a_n \rightarrow l$.

Problema 3. (a). ⁴ (2 pts.) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones reales tales que $a_n \leq a$, $b_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $a_n + b_n \rightarrow a + b$. Demuestre que $a_n \rightarrow a$ y $b_n \rightarrow b$.

(b). ⁵ Sea $a \in \mathbb{R}$ y $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio de grado $k \in \mathbb{N}$. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) \frac{a^n}{n^n}$.

(c). Sea (b_n) acotada y (a_n) tal que $(1/a_n)$ es nula. Muestre que $\frac{1}{a_n + b_n} \rightarrow 0$.

¹MA1001-4 (Otoño 2020). Control 3, P1 (b).

²MA1001-4 (Otoño 2020), Auxiliar #10. P1. Este problema salió en el control del mismo semestre con $(a_n) = (1)$ y $r = 1$ (MA1001-4 (Otoño 2020). Control 3, P1 (c).).

³MA1001-4 (Otoño 2020), Auxiliar #10. P3.

⁴MA1001 (Primavera 2022), Control 3, P1 b).

⁵Apunte del Curso (MA1001), semana 9, problema P2.