

MA1001-4 Introducción al Cálculo-2023.

Profesor: Yamit Yalanda.

Auxiliar: Sebastián P. Pincheira

15 de mayo de 2023



AUXILIAR 6

El Supremo

Problema 1.

a) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ una cota superior. Muestre que $\sup A = \alpha$ si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \alpha - \varepsilon < a.$$

De manera similar, muestre que, si $\beta \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A , entonces $\inf A = \beta$ si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a < \beta + \varepsilon.$$

b) Sea γ un número real positivo. Sea $A = \{r \in \mathbb{R} \mid r \in \mathbb{Q} \wedge r < \gamma\}$. Muestre que A tiene supremo y calcúlelo.

Solución. a) Asumamos $\sup A = \alpha$. Sea $\varepsilon > 0$ luego, como $\alpha - \varepsilon < \alpha$, entonces $\alpha - \varepsilon$ no es cota superior de A y por lo tanto existe un elemento $a \in A$ que lo supera. Es decir, $\alpha - \varepsilon < a$.

Asumamos ahora $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \alpha - \varepsilon < a$. Como α es cota superior de A , se sigue que $\sup A \leq \alpha$: si $\sup A < \alpha$, entonces existe un $a \in A$ tal que $\alpha - (\alpha - \sup A) < a$ (donde se usó $\varepsilon = \alpha - \sup A > 0$), es decir, $\sup A < a$ para algún $a \in A$ lo que contradice la definición de supremo y se concluye que $\sup A = \alpha$.

Para el $\inf$ el proceso es similar y queda como propuesto.

b) Como γ es un número real positivo, se tiene que $0 < \gamma$ con lo que $0 \in A$. Claramente γ es una cota superior de A , mostremos que es la menor: sea $\varepsilon > 0$ y sea $r \in (\gamma - \varepsilon, \gamma) \cap \mathbb{Q}$ (válido pues los reales son densos en $\mathbb{R}$), se sigue que $\gamma - \varepsilon < r$ y, por la parte anterior, se sigue que $\sup A = \gamma$.

□

Problema 2. Sea

$$A = \left\{ \frac{m}{m(n+1)+1} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Muestre que $\sup A = 1$.

Solución. Partiremos mostrando que 1 es cota superior: Si $m = 0$, entonces

$$\frac{m}{m(n+1)+1} = 0.$$

Si $n = 0$,

$$\frac{m}{m(n+1)+1} = \frac{m}{m+1} < 1.$$

Si $n, m \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{m}{m(n+1)+1} &\leq \frac{m}{m(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &< 1 \end{aligned}$$

y se tiene que 1 es cota superior. Mostremos ahora que 1 es supremo. Sea $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar $m, n \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 - \varepsilon < \frac{m}{m(n+1) + 1}.$$

Es decir, queremos encontrar *alguna* solución a la inecuación anterior sobre $m, n \in \mathbb{N}$. Intentaremos encontrar una solución con $n = 0$ (para simplificar el proceso). Es decir, queremos encontrar alguna solución de

$$1 - \varepsilon < \frac{m}{m+1}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < \frac{m}{m+1} &\iff 1 - \frac{m}{m+1} < \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{m+1} < \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{\varepsilon} < m+1 \\ &\iff \frac{1}{\varepsilon} - 1 < m \\ &\iff \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < m. \end{aligned}$$

Por la propiedad arquimedea de los reales, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $(1 - \varepsilon)/\varepsilon < m$ y $n = 0$, entonces

$$1 - \varepsilon < \frac{m}{m(n+1) + 1}$$

y se concluye que 1 es supremo de A . □

Problema 3.

- a) Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Determine si el conjunto $f([0, 1])$ es acotado superiormente, calcule el supremo y considere si tiene máximo.
- b) Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos que cumplen: $A \cup B = \mathbb{R}$ y todo elemento de A es menor que todo elemento de B . muestre que existe un número α tal que $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq \alpha \leq b$. Muestre que α es único.

Solución. a) Se tiene que $f(x) \leq f(1)$ para todo $x \in [0, 1]$ pues $x \leq 1$ y se sigue que $f([0, 1])$ es acotado superiormente. Como $f(0) \in f([0, 1])$, $f([0, 1]) \neq \emptyset$. Se sigue del axioma del supremo que $f([0, 1])$ tiene supremo α . Como $f(1) \in f([0, 1])$, $f(1) \leq \alpha$ pero, además, $f(1)$ es cota superior por lo que, por definición de supremo, $f(1) = \alpha$. Finalmente, como $f(1) \in f([0, 1])$, se sigue que $f(1)$ es el máximo de este conjunto.

- b) Sea $b \in B$. Entonces b es cota superior de A , conjunto no vacío. Sea $\alpha = \sup A$. Se sigue que $a \leq \alpha$ para cada $a \in A$. Sea $b \in B$, entonces b es cota superior de A y, como α es la menor cota superior, $\alpha \leq b$. se concluye que $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq \alpha \leq b$.

Sea β tal que $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq \beta \leq b$, entonces β es cota superior de A con lo que $\alpha \leq \beta$. Por contradicción, sea $\alpha < \beta$ y sea $x \in (\alpha, \beta)$. Claramente $x \notin A$ pues es mayor que su supremo, además, $x \notin B$ pues $\beta \leq b$ para cada elemento de $b \in B$. Es decir, $x \in \mathbb{R} \setminus (A \cup B) = \emptyset$ lo que no hace sentido. Se concluye que α es único. □

Problema 4. Sea $\mathbb{R}'$ los números reales hasta antes de introducir el axioma del supremo. Sea $\mathbb{R}$ los reales (con axioma del supremo) y $\mathbb{F}$ la estructura $\mathbb{R}'$ con, además, la negación del axioma del supremo. Sea $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}', \mathbb{R}, \mathbb{F}\}$. Definimos un **corte de Dedekind** como un subconjunto X no vacío de $\mathbb{K}$ que cumple

1. $X \neq \mathbb{K}$
2. X es cerrado hacia abajo: $\forall y, z \in \mathbb{K}, [y < z \wedge z \in X] \implies y \in X$.
3. X no tiene máximo: no existe $y \in X$ tal que $z \leq y$ para todo $z \in X$.

- a) Demuestre que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entonces un conjunto $X \subseteq \mathbb{K}$ es un corte de Dedekind si y solo si $X = (-\infty, \alpha)$ para algún $\alpha \in \mathbb{K}$.

- b) Demuestre que si $\mathbb{K} = \mathbb{F}$, entonces existen cortes de Dedekind que no se pueden escribir como $(-\infty, \alpha)$ para algún $\alpha \in \mathbb{K}$. (De esto se sigue que $\mathbb{Q}$ tiene cortes de Dedekind que no se pueden escribir en la forma $(-\infty, \alpha)$ para algún $\alpha \in \mathbb{Q}$ pues $\mathbb{Q}$ satisface todas las propiedades de $\mathbb{F}$ pues cumple con sus axiomas).

Se puede entender este resultado como “ $\mathbb{Q}$ no tiene suficientes elementos como para representar todos sus cortes de Dedekind mientras que $\mathbb{R}$ sí”.

Solución. a) Sea X un corte de Dedekind. Se tiene que $X \neq \emptyset$. Mostraremos que X es acotado superiormente. Por contradicción, si X no es acotado superiormente, entonces $\forall k \in \mathbb{K}, \exists x \in X, k < x$. Sea $k \in \mathbb{K}$, y sea $x \in X$ tal que $k < x$. Como X es cerrado hacia abajo, $k \in X$ y se concluye que $\mathbb{K} \subseteq X$. Como, por definición, $X \subseteq \mathbb{K}$, se sigue que $X = \mathbb{K}$, lo que contradice $X \neq \mathbb{K}$ y se concluye que X es acotado. Por el axioma del supremo, X tiene supremo. Denotaremos $\sup X = \alpha$. Queremos mostrar ahora que $X = (-\infty, \alpha)$ por doble inclusión. Sea $x \in (-\infty, \alpha)$. Por contradicción, si $x \notin X$, entonces $\forall z \in X, z < x$ (pues si no, existe un $z \in X$ con $x < z$ y la cerradura de X hacia abajo nos lleva a $x \in X$). Es decir, x es cota superior de X y, además, $x < \alpha$. Esto contradice $\sup X = \alpha$. Se concluye que $x \in X$ y $(-\infty, \alpha) \subseteq X$. Sea ahora $x \in X$. Como α es cota superior de X , $x \leq \alpha$ y, como X no tiene elemento máximo, $x < \alpha$ y $x \in (-\infty, \alpha)$. Se concluye que $X = (-\infty, \alpha)$ con $\alpha = \sup X$.

- b) Sea A un subconjunto de $\mathbb{K}$ no vacío y acotado superiormente que no tenga supremo. Sea $X = \bigcup_{a \in A} (-\infty, a]$ y mostremos que X es corte de Dedekind. En efecto, $A \subseteq X$ con lo que $X \neq \emptyset$. Sea k una cota superior de A , si $k \in X$, entonces $k \leq a$ para algún $a \in A$, es decir, $k = a$ con lo que A tendría máximo y, *a fortiori*, supremo. Se concluye que $k \notin X$ y $X \neq \mathbb{K}$. Para mostrar que X es cerrado hacia abajo, sea $x \in X$ y $z < x$: como $x \leq a$ para algún $a \in A$, entonces $z < a$ para algún $a \in A$ y $z \in X$. Para mostrar que X no tiene máximo: si k es un máximo, entonces $k \leq a$ para algún $a \in A$ y, como $a \in X$, se sigue que $a = k$ y entonces $k \in A$. Además, como k es máximo de X y $A \subseteq X$, se sigue que k es cota superior de A y, como $k \in A$, entonces A tiene máximo. Esto último contradice el hecho que A no tiene supremo y se concluye que X no tiene máximo. Es decir, X es un corte de Dedekind.

Mostraremos que $X = (-\infty, \alpha)$ es falso para todo $\alpha \in \mathbb{K}$. Para lograr esto, procederemos por contradicción y mostraremos que α es supremo de A : Asumamos que $X = (-\infty, \alpha)$ para algún $\alpha \in \mathbb{K}$. Como $A \subseteq X$, se sigue que $\forall a \in A, a < \alpha$ y α es una cota superior de A . Sea $\varepsilon > 0$, y sea $x = \alpha - \varepsilon/2$. Se sigue que $\alpha - \varepsilon < x < \alpha$ con lo que $x \in X$, es decir, existe un $a \in A$ tal que $x \leq a$ y, como $\alpha - \varepsilon < x$, $\alpha - \varepsilon < a$. Se concluye que α es supremo de A , una contradicción. Es decir, X no se puede escribir como $(-\infty, \alpha)$ para ningún α . □

Problema 5. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos acotados superiormente. Demuestre que

- a) Existe $\sup(A \cup B)$
 b) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

Solución. a) Sea α el supremo de A y β una el supremo de B (existen pues son acotados no vacíos). Se sigue que $\max\{\alpha, \beta\}$ es cota superior de $A \cup B$ pues si $x \in A \cup B$ entonces, si $x \in A$, $x \leq \alpha \leq \max\{\alpha, \beta\}$ y, si $x \in B$, entonces $x \leq \beta \leq \max\{\alpha, \beta\}$. Se sigue que $A \cup B$ es acotado. Además, $A \cup B$ es no vacío pues $A \subseteq A \cup B$. Se sigue que $A \cup B$ tiene supremo.

- b) Sea $M = \max\{\alpha, \beta\}$. Vimos ya que M es cota superior de $A \cup B$. Mostremos que es supremo. Sea $\varepsilon > 0$, sea $a \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < a$ y $b \in B$ tal que $\beta - \varepsilon < b$. Entonces $\alpha - \varepsilon < \max\{a, b\}$ y $\beta - \varepsilon < \max\{a, b\}$, es decir, $\alpha, \beta < \max\{a, b\} + \varepsilon$ y se concluye que $M - \varepsilon < \max\{a, b\}$. □

Problema 6. Definimos $\|h\| = \sup\{|h(x)| \mid x \in [0, 1]\}$ para cualquier función acotada $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Demuestre que $\|\bullet\|$ es una norma. Es decir, para cada $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas y para cada $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
3. $\|f\| = 0 \iff f = o$

donde $o: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ está definida mediante $x \mapsto 0$. Recuerde de los auxiliares anteriores que estas son las tres propiedades más importantes del valor absoluto (si reemplazamos $\|\bullet\|$ por $|\bullet|$).

Solución. Como h es acotada, $|h(x)|$ será menor que el valor absoluto de una de las cotas de $h(x)$ y se sigue que, como $h([0, 1])$ es no vacío, se sigue que $\|h\|$ está bien definido. Sea $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas. $\forall x \in [0, 1]$, $(|f(x)| \leq \|f\| \wedge |g(x)| \leq \|g\|)$ por lo que $\|f\| + \|g\| \geq |f(x)| + |g(x)| \geq |f(x) + g(x)|$. Es decir, $\|f\| + \|g\|$ es cota superior de $\{|f(x) + g(x)| \mid x \in [0, 1]\}$ con lo que $\|f\| + \|g\| \geq \|f + g\|$ pues $\|f + g\|$ es la menor cota superior del conjunto.

Sea $o(x) = 0$ para cada $x \in [0, 1]$. Entonces $\|o\| = \sup\{|o(x)| \mid x \in [0, 1]\} = \sup\{0\} = 0$. Además, si $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es acotado y $\|f\| = 0$, entonces $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq 0$ y se sigue que $f(x) = 0$ para cada $x \in [0, 1]$ y se concluye que $f = o$. Se concluye que $\|f\| = 0 \iff f = o$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq \|f\|$ y se sigue que $|\lambda f(x)| \leq |\lambda| \|f\|$ con lo que $|\lambda| \|f\|$ es cota superior de $\{|\lambda f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$ por lo que $\|\lambda f\| \leq |\lambda| \|f\|$ pues $\|\lambda f\|$ es la menor cota superior del conjunto. Si $\lambda = 0$, por la parte anterior $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| = 0$. Se tiene además que $\forall x \in [0, 1]$, $|\lambda f(x)| \leq \|\lambda f\|$, se sigue que $|f(x)| \leq \|\lambda f\|/|\lambda|$ y se sigue que $\|f\| \leq \|\lambda f\|/|\lambda|$ con lo que podemos concluir que $|\lambda| \|f\| \leq \|\lambda f\|$ y se tiene $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$. $\square$